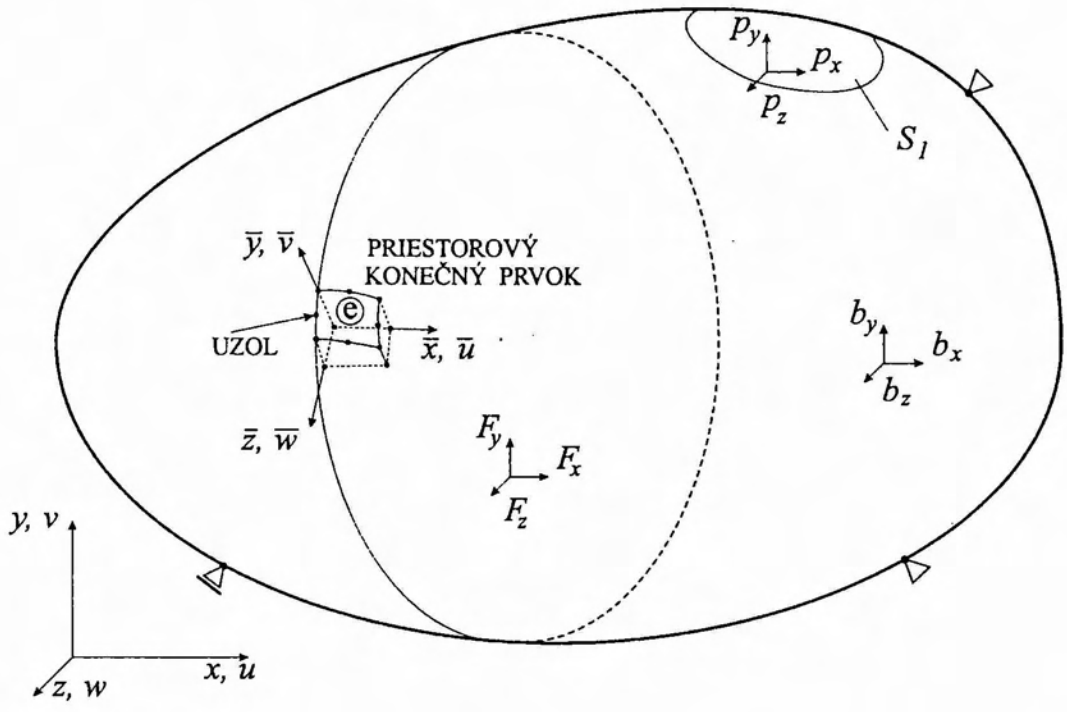
VÝPOČTOVÉ POSTUPY MKP

PRI RIEŠENÍ LINEÁRNYCH ÚLOH MECHANIKY

- STATICKÉ A DYNAMICKÉ PEVNOSTNÉ ÚLOHY
- KMITANIE TELIES A KONŠTRUKCIÍ
- VÝPOČET STACIONÁRNEHO A NESTACIONÁRNEHO TEPLOTNÉHO POĽA
- KONKRÉTNE POSTUPY RIEŠENIA ÚLOH PRE PROGRAM ANSYS

ŠTEFAN BENČA



SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE

STROJNÍCKA FAKULTA

VÝPOČTOVÉ POSTUPY MKP

PRI RIEŠENÍ LINEÁRNYCH ÚLOH MECHANIKY

ŠTEFAN BENČA

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
2006

Monografia obsahuje základnú teóriu metódy konečných prvkov na riešenie statických a dynamických pevnostných úloh a na výpočet stacionárneho i nestacionárneho vedenia tepla v telesách. Na riešenie týchto úloh zároveň poskytuje podrobné postupy konkrétneho numerického riešenia v prostredí programového systému ANSYS. Výpočtové postupy sú demonštrované na geometricky jednoduchých telesách tak, aby boli plne využiteľné aj pri riešení reálnych úloh technickej a výpočtárskej praxe.

Práca sa snaží o vyplnenie medzery existujúcej medzi podrobnými teoretickými monografiami určenými predovšetkým tvorcom programov MKP a výskumným pracovníkom v tejto oblasti a fyzikálne i teoreticky nekompletnými užívateľskými príručkami, ktoré sprevádzajú jednotlivé komerčné programy MKP. Môže byť tiež vhodným doplnkom základných učebníc MKP, ktoré väčšinou neposkytujú konkrétne výrobné postupy pre aplikačne zameraného užívateľa metódy.

© Doc. Ing. Štefan Benča, CSc.

Lektori: Prof. Dr. Ing. Vladimír Kompiš, CSc.
Prof. Ing. Justín Murín, DrSc.
Doc. Ing. Pavel Élesztős, CSc.

Schválilo vedenie Strojníckej fakulty STU v Bratislave dňa 12. 4. 2005 pre 4. a 5. ročník.

ISBN 80-227-2404-1

OBSAH

Zoznam hlavných symbolov 7

1 ZÁKLADNÉ POJMY A ÚDAJE 9

1.1 Úvod 9
1.2 Aplikačný záber metódy 10
1.3 Princíp metódy, základné pojmy a základné kroky riešenia úlohy 12
1.4 Program ANSYS – základné údaje 16
1.5 Úvodný príklad 20

2 STATICKÉ PEVNOSTNÉ ÚLOHY 23

2.1 Formulácia úlohy 23
2.2 Diskretizácia telesa 27
2.3 Základné vzťahy a matice prvku 29
2.4 Rovnice rovnováhy prvku. Vnútorné uzlové sily 33
2.5 Matice telesa a výsledná sústava rovníc 34
Príklad – Priestorové teleso 38

2.6 Redukované pevnostné úlohy 42

2.6.1 Prútové sústavy 43
2.6.1.1 Výpočet matíc prútového prvku v globálnom súradnicovom systéme 43
2.6.1.2 Globálne, lokálne a prirodzené súradnice jednorozmerného prvku 45
2.6.1.3 Výpočet matíc jednorozmerného izoparametrického prvku 47
2.6.1.4 Numerická integrácia funkcií jednej premennej 49
2.6.1.5 Matice priestorového prútového prvku 50
Príklad – Výpočet matíc prútových prvkov 53
Príklad – Rovinná prútová sústava 54

2.6.2 Rámové konštrukcie 57
2.6.2.1 Deformačná teória rovinného nosníka 58
2.6.2.2 Určenie matíc rovinného rámového prvku 59
Príklad – Rovinná nosníková konštrukcia 63
2.6.2.3 Priestorové rámové konštrukcie 66
Príklad – Priestorový rám 1 70
Príklad – Priestorový rám 2 73

2.6.3 Dvojrozmerné úlohy 76
2.6.3.1 Matice bilineárneho izoparametrického prvku 80
2.6.3.2 Kvadratický izoparametrický štvoruholníkový prvok 83
2.6.3.3 Trojuholníkové prvky 85
2.6.3.4 Plošné súradnice trojuholníkových prvkov 87
Príklad – Rotačne symetrické teleso 90
2.6.3.5 P-metóda riešenia lineárnych pevnostných úloh 92
Príklad – Rovinná napätosť; aplikácia p-metódy 93

3 NESTACIONÁRNE PEVNOSTNÉ (DYNAMICKÉ) ÚLOHY 97

3.1 Rovnice dynamickej rovnováhy telesa (pohybové rovnice) 97

3.2 Matice hmotnosti 99

3.3 Výpočet vlastných frekvencií a vlastných tvarov kmitania 100
Príklady – Výpočet vlastných frekvencií a vlastných tvarov kmitania 102

3.4 Metódy priamej integrácie pohybových rovníc 108
3.4.1 Newmarkova metóda 110
Príklady – Nestacionárne (dynamické) zaťažovanie; priama integrácia pohybových rovníc 112

3.5 Riešenie sústavy rovníc v MKP 119

3.6 Metóda superpozície vlastných tvarov 121
Príklady – Využitie metódy superpozície vlastných tvarov 124

3.7 Harmonická analýza 130
Príklad – Harmonická analýza 132

3.8 Redukcia matíc úlohy 134
Príklad – Redukovaná metóda; úloha s proporcionálnym tlmením 136

4 PRENOS TEPLA VEDENÍM 139

4.1 Formulácia úlohy 139

4.2 Geometrická a časová diskretizácia úlohy. Matice prvku a telesa. Výsledná sústava rovníc 141
Príklad – Výpočet ustáleného teplotného poľa 144
Príklad – Analýza nestacionárneho teplotného poľa 148

Literatúra 150

ZOZNAM ZÁKLADNÝCH SYMBOLOV

INDEXY

e	všeobecný, ľubovoľný, e-ty prvok
$i,\ j,\ k,\ \ldots$	lokálne číslovanie uzlových bodov (uzlov) prvku
NVU	počet stupňov voľnosti uzla
NVE	počet stupňov voľnosti prvku
NVT	počet stupňov voľnosti výpočtového modelu telesa
NUE	počet uzlov prvku
NUT	počet uzlov telesa
NET	počet prvkov telesa

LATINSKÉ A GRÉCKE SYMBOLY

E	modul pružnosti v ťahu
G	modul pružnosti v šmyku
I_z	kvadratický moment prierezu k osi
I_k	moment tuhosti prierezu v krútení
μ	Poissonovo číslo materiálu
N_i^e	interpolačná (tvarová) funkcia prvku
ω	vlastná kruhová frekvencia kmitania
Ω	kruhová frekvencia harmonického zaťaženia
$P_i,\ Q_i$	vnútorné uzlové sily prvku
t	čas
Δt	časový krok
T	teplota
$V_e,\ S_e,\ L_e$	objem, plocha, dĺžka prvku
$u,\ v,\ w$	zložky posunutia bodu v globálnom súradnicovom systéme
$\overline{u},\ \overline{v},\ \overline{w}$	zložky posunutia bodu v lokálnom súradnicovom systéme prvku
$x,\ y,\ z$	globálne súradnice
$\overline{x},\ \overline{y},\ \overline{z}$	lokálne súradnice prvku
$\xi,\ \eta,\ \zeta$	prirodzené súradnice prvku

MATICE

$\mathbf{a}^e$, $\mathbf{a}$	vektor (stĺpcová matica) posunutí uzlových bodov prvku, telesa
$\mathbf{b},\ \mathbf{p},\ \mathbf{F}$	vektor objemových, plošných, sústredených síl

$\mathbf{B}^e$, $\mathbf{B}_e$	transformačná matica pretvorení
$\mathbf{C}$	matica tlmenia telesa
$\mathbf{D}$	matica materiálových konštánt
$\boldsymbol{\varepsilon}$	stĺpcová matica obsahujúca zložky pretvorenia
$\boldsymbol{\varepsilon}_T$	vektor začiatočného teplotného pretvorenia
$\mathbf{f}^e$, $\mathbf{f}$	vektor vonkajších uzlových síl prvku, telesa
$\boldsymbol{\phi}$	vektor vlastného tvaru kmitania telesa
$\mathbf{J}_e$	Jacobiho matica izoparametrického prvku
$\mathbf{K}^e$, $\mathbf{K}$	matica tuhosti prvku, telesa
$\mathbf{M}^e$, $\mathbf{M}$	matica hmotnosti prvku, telesa
$\mathbf{N}^e$, $\mathbf{N}_e$	matica interpolačných (tvarových) fukcií prvku
$\mathbf{q}$	vektor vnútorných uzlových síl
$\boldsymbol{\sigma}$	stĺpcová matica obsahujúca zložky napätia
$\mathbf{u}$	vektor posunutí všeobecného bodu
$\tilde{\mathbf{K}}$, $\tilde{\mathbf{a}}$, $\tilde{\mathbf{f}}$	redukované matice telesa
$\underline{\mathbf{K}}^e$, $\underline{\mathbf{f}}^e$	rozšírené matice prvku
$\overline{\mathbf{K}}^e$, $\overline{\mathbf{a}}^e$, $\overline{\mathbf{q}}^e$	matice v lokálnom súradnicovom systéme prvku

1 ZÁKLADNÉ POJMY A ÚDAJE

1.1 Úvod

Výpočtové úlohy, s ktorými sa stretávavame v inžinierskej praxi, možno rozdeliť do dvoch základných skupín:

a) úlohy pre diskrétne sústavy a konštrukcie
b) úlohy pre spojité telesá a oblasti

Príkladmi z prvej skupiny môže byť napr. nosníková konštrukcia, rozvod tepla, resp. tekutiny v potrubnej sieti, elektrický obvod a pod. Takúto sústavu možno prirodzeným spôsobom rozdeliť na jednotlivé *prvky*, ktoré sa stýkajú v spoločných *bodoch (uzloch)*. Napísaním rovnovážnych (bilančných) podmienok pre uzly dostaneme sústavu obyčajných rovníc, z ktorých možno dostať hľadané hodnoty v uzloch a zo známych vzťahov medzi uzlovými a prvkovými hodnotami aj riešenie pre celú sústavu.

Úlohy pre spojité telesá a oblasti vedú obyčajne na (parciálne) diferenciálne rovnice, ktoré treba riešiť pri okrajových, prípadne i začiatočných podmienkach úlohy. Telesá a oblasti sú pritom často zložito priestorovo tvarované, s lokálnymi nespojitosťami a komplikovanými okrajovými podmienkami. Často treba riešiť nestacionárne, nelineárne a nestabilné úlohy. Uvedené problémy pri väčšine praktických inžinierskych úloh neumožňujú exaktné riešenie diferenciálnych rovníc úlohy a musíme použiť približné metódy na výpočet hľadaných hodnôt.

V súvislosti s rozvojom výpočtovej techniky sa v súčasnosti na približné (numerické) riešenie diferenciálnych rovníc často používajú tzv. *priame metódy*. Sú to také metódy približného riešenia úloh z teórie diferenciálnych a integrálnych rovníc, ktoré prevedú tieto úlohy na konečné systémy algebrických rovníc. Celý proces možno naprogramovať a po zadaní vstupných hodnôt výpočet neznámych zo systému rovníc a spracovanie výsledkov veľmi efektívne vykoná počítač.

V teórii i pri praktickom použití priamych metód možno v mnohých prípadoch riešenie diferenciálnej rovnice nahradiť ekvivalentnou úlohou nájdenia funkcie, ktorá minimalizuje špeciálny integrál (potenciál, funkcionál) danej úlohy. Niekedy je výhodnejšie použiť priamu metódu na riešenie takejto ekvivalentnej úlohy, ako na riešenie diferenciálnej rovnice. Napr. pri udaných okrajových podmienkach sa môže riešenie diferenciálnych rovníc pružnosti telesa nahradiť minimalizáciou integrálu, ktorý vyjadruje celkovú potenciálnu energiu zaťaženého telesa. Metódy, ktoré nahradzujú úlohu integrovania diferenciálnej rovnice, resp. rovníc, hľadaním extrému funkcionálu úlohy, sa vo všeobecnosti nazývajú *variačné*.

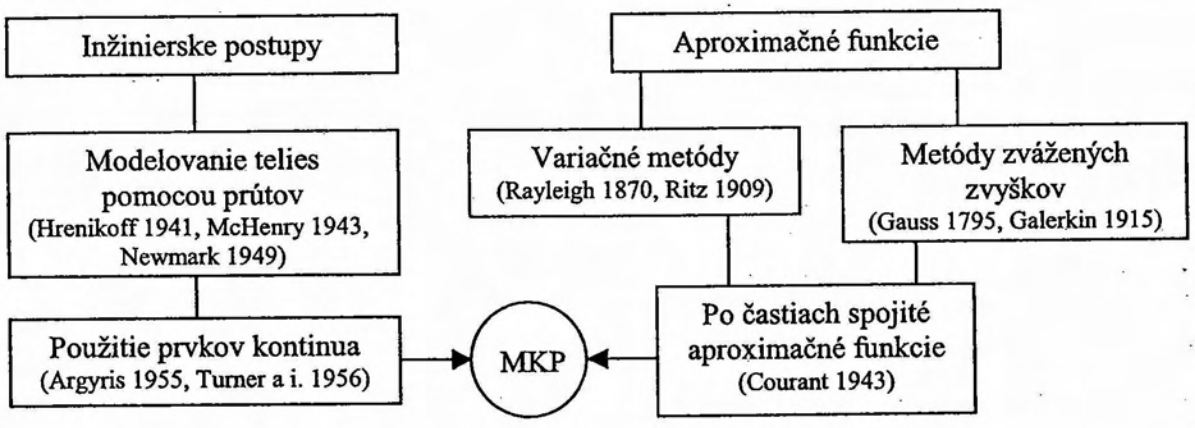
Za základné zdroje vzniku a rozvoja MKP môžeme považovať aplikáciu spôsobu riešenia diskrétnych úloh na spojité teleso, resp. spojitú oblasť v kombinácii s využitím modifikovaného variačného postupu. Oproti klasickým variačným postupom sa v MKP nehľadajú aproximačné funkcie na celej oblasti riešenia, ale len na jej častiach (konečných prvkoch) so zaručením spojitosti funkcií na hraniciach prvkov. Historické zdroje vzniku MKP sme znázornili na obrázku 1.1, údaje o priekopníckych prácach uvedených autorov možno nájsť napr. v [1, 2]. Ďalší vývoj a búrlivý rozvoj metódy ilustrujú publikácie v [3].

Možnosť využitia postupov riešenia diskrétnych úloh aj pre spojité oblasti vedie tiež na *jednu z definícií MKP*: Je to približná metóda riešenia úloh kontinua, pri ktorej

a) sa kontinuum rozdelí na určitý počet častí s *konečnými* rozmermi (na *konečné prvky*), ktorých vlastnosti určuje určitý počet parametrov

b) riešenie celého systému, ktorý je tvorený súhrnom jeho prvkov zviazaných v tzv. *uzlových bodoch*, sa vykoná rovnakým postupom ako pri úlohách diskrétneho charakteru.

Dôležitým dôsledkom takéhoto postupu je fakt, že *primárnymi neznámymi* nebudú hľadané funkcie úlohy, ale len hodnoty týchto funkcií v uzlových bodoch a bude sa riešiť *sústava obyčajných rovníc*. Z vypočítaných hodnôt na hraniciach prvkov za pomoci aproximačných funkcií prvkov možno však získať *približné spojité* riešenie úlohy na prvkoch a tým i na celej oblasti.



Obrázok 1. 1 Základné zdroje vzniku MKP

1.2 Aplikačný záber metódy

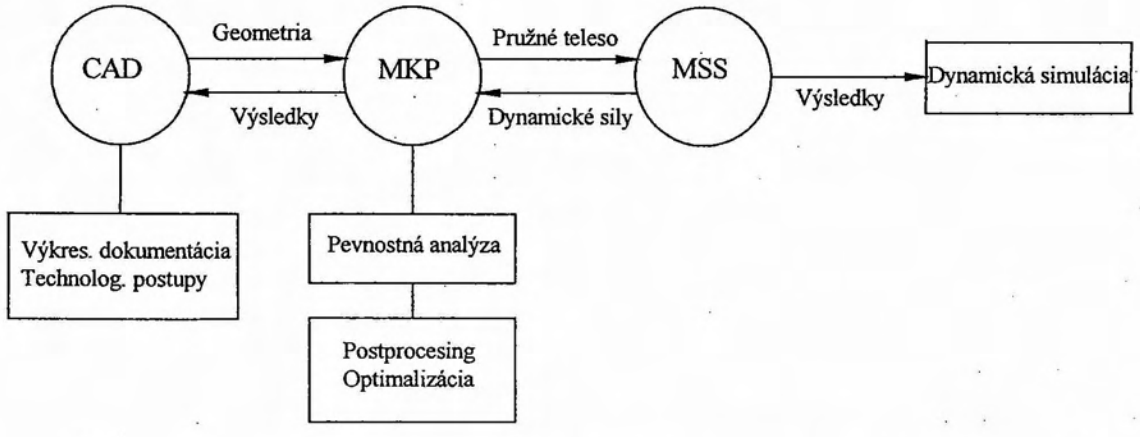
Z úvodnej charakteristiky MKP je zrejmé, že ju pre spojité oblasti môžeme charakterizovať aj ako približnú, počítačovo orientovanú metódu riešenia diferenciálnych rovníc. Použitie voliteľných podoblastí (konečných prvkov) pritom jednoducho rieši problém geometrických, materiálových a iných nespojitostí (hranica nespojitosti sa stotožní s hranicou prvkov s rozdielnymi charakteristikami spôsobujúcimi nespojitosť – skoková zmena geometrie, zaťaženia, rozdielny materiál a pod.). Algoritmizácia a programové spracovanie spojené s výkonnou výpočtovou technikou nielen že umožňuje riešiť zložité úlohy výskumnej a technickej praxe, ale efektívnym spôsobom zjednodušuje aj zadávanie úlohy a vyhodnocovanie výsledkov jej riešenia (grafický pred- a postprocesing). Veľké komerčné programové systémy určené na riešenie výpočtárskych úloh pomocou MKP (ANSYS, NASTRAN, ADINA, MARC, COSMOS a i.) využívajú analógiu riešenia úloh mechaniky kontinua a sú stavané univerzálne, t. j. užívateľ v podstate rovnakým postupom, mnohokrát aj rovnakými príkazmi, rieši úlohy z mechaniky telies, prenosu tepla, prúdenia, akustiky, elektromagnetického poľa a pod. Nemusí teda pre každú oblasť študovať iný a inak užívateľsky stavaný program.

Univerzálne programové systémy MKP v súčasnosti obsahujú hlavne túto aplikačnú ponuku:

- ***Pružnosť a pevnosť/Dynamika***: 2D a 3D pevnostné úlohy geometricky všeobecných telies a konštrukcií pri ľubovoľnom statickom a dynamickom zaťažení, vlastné frekvencie, harmonické budenie, všeobecné a náhodné zaťažovanie, spektrálna analýza
- ***Nelinearity***: izotropná a anizotropná plasticita, veľké posunutia a deformácie, 2D a 3D kontaktné úlohy s trením, strata stability, hyperelastické a tesniace materiály, betón, creep, swelling, viskoelasticita a viskoplasticita

- ***Lomová mechanika, flexibilná kinematika, kompozitné materiály***
- ***Prenos tepla***: stacionárne, nestacionárne; lineárne, nelineárne; konvekcia, kondukcia a radiácia; fázové premeny
- ***Prúdenie***: stacionárne - nestacionárne, laminárne - turbulentné, stlačiteľné - nestlačiteľné, newtonovské - nenewtonovské, jednozložkové - viaczložkové, adiabatické - alebo s prenosom tepla a výpočtom koeficientov prestupu tepla, tlakové vlny a rázy, priama väzba na teplotné pole a pevnostnú mechaniku pri problémoch prúdenie + prenos tepla + mechanické zaťaženie, interakcia tekutiny s konštrukciou
- ***Simulácia zváracích procesov***: na 2D, resp. 3D telesách; teplotné pole, fázové/štrukturálne zmeny materiálu, tvrdosť, zvyškové napätia
- ***Problémy polí***: Elektrické pole, magnetické pole, elektrostatika, piezoelektrické javy, akustika, interakcia akustickej tekutiny s konštrukciou, zviazané problémy a i.
- ***Optimalizačné výpočty*** pre tzv. cieľovú funkciu (napr. napätie, hmotnosť, tvar telesa a pod.)
- ***Vlastný predprocessing*** (interaktívny grafický i s vlastným programovacím jazykom), možnosť tvorby subštruktúr (superelementov), submodeling, okolo 200 typov konečných prvkov rôzneho určenia a presnosti

Efektívna inžinierska práca je v súčasnosti už nemysliteľná bez kvalifikovaného využívania počítačových technológií (CAT). V tomto komplexe MKP (v angličtine FEM – *Finite Element Method*) v oblasti pevnostných výpočtov najužšie spolupracuje s prostriedkami pre dizajn (CAD) a simuláciu mechanických sústav (MSS) zhruba podľa schémy na obr. 1.2. O približnosti tejto schémy treba hovoriť preto, že časti MKP (najmä lineárne pevnostné riešenia) sú už často integrálnou súčasťou CAD systémov (napr. I-DEAS, PRO/I, CATIA, SOLID EDGE). Pravda, úloha MKP nespočíva len v priamej službe pre tento reťazec. Ako sme uviedli, jej záber je širší, umožňuje *samostatné* numerické analýzy zložitých inžiniersko-fyzikálnych problémov (ktoré v konečnom dôsledku opäť slúžia pre návrh virtuálnych prototypov CAT).



Obrázok 1.2 Miesto MKP v prostredí počítačových technológií

V tomto samostatnom zmysle sa MKP budeme venovať aj v tejto práci. Budeme predpokladať, že pôsobiace „silové" účinky sú známe a pôsobia na geometricky *jednoduché* telesá. Na takýchto úlohách si vysvetlíme princíp metódy, teoretické základy a aplikačné (výpočtové) postupy. Riešenie úlohy pre *zložité* reálne teleso, resp. oblasť má rovnaké teoretické základy a v aplikačnej oblasti vyžaduje len viac práce s grafickým editorom, čo je úloha intuitívne zvládnuteľná postupnou praxou. Na konkrétne výpočty úloh budeme využívať univerzálny program ANSYS [4].

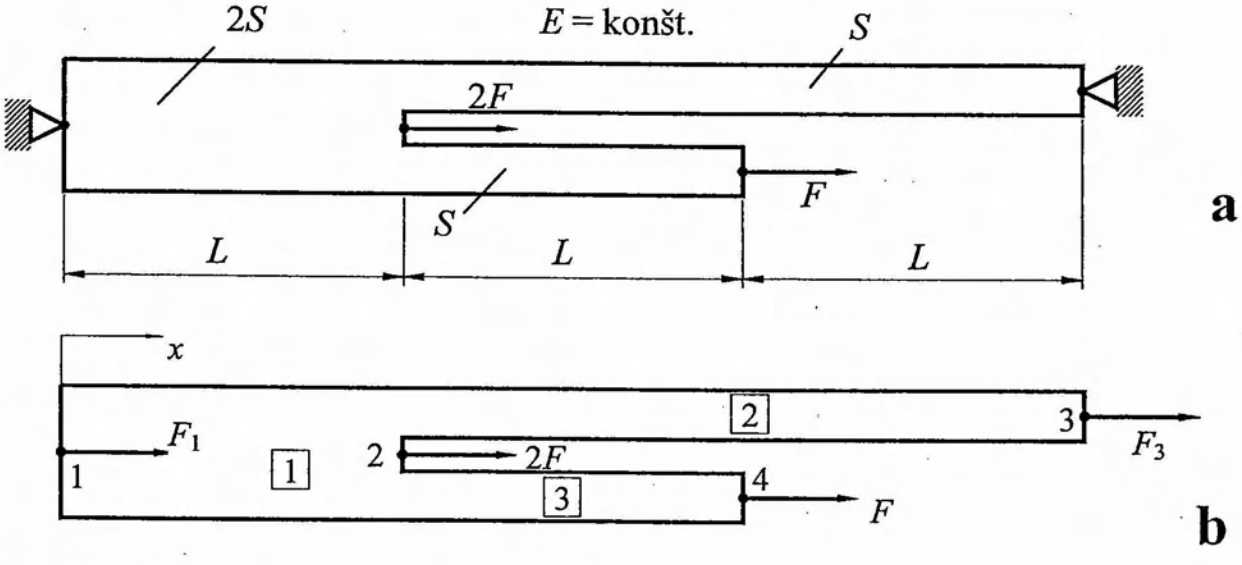
1.3 Princíp metódy, základné pojmy a základné kroky riešenia úlohy

Konkrétny postup riešenia úlohy pomocou MKP obsahuje kroky, ktoré sa pri každej úlohe opakujú a dajú sa výhodne algoritmicky spracovať a naprogramovať. Tento postup možno najnázornejšie sledovať, a princíp metódy najľahšie pochopiť, pri riešení jednoduchých *diskrétnych jednorozmerných* úloh. I keď pri riešení viacrozmerných diskrétnych úloh a úloh pre *spojité* telesá a oblasti princíp i postup zostávajú zachované (pozri uvedenú definíciu metódy), vzhľadom na zložitejšie východzie formulácie sú viacej schované a menej názorné, nehovoriac o tom, že aj malé jednoduché úlohy sa nedajú vyčísliť bez pomoci počítača.

Uvažujme jednorozmernú pevnostnú úlohu pre prút upevnený a zaťažený podľa obr. 1.3. Pretože neuvažujeme vlastnú tiaž a zanedbáme malý ohyb telesa, prút je zaťažený jednoduchým ťahom/tlakom od síl F a $2F$. Je vyrobený z materiálu, ktorého modul pružnosti v ťahu/tlaku je E; dĺžka L a prierez S sú známe. Našou úlohou je výpočet posunutí, reakcií a napätí prúta pomocou MKP.

1. ***Diskretizácia telesa (oblasti)***

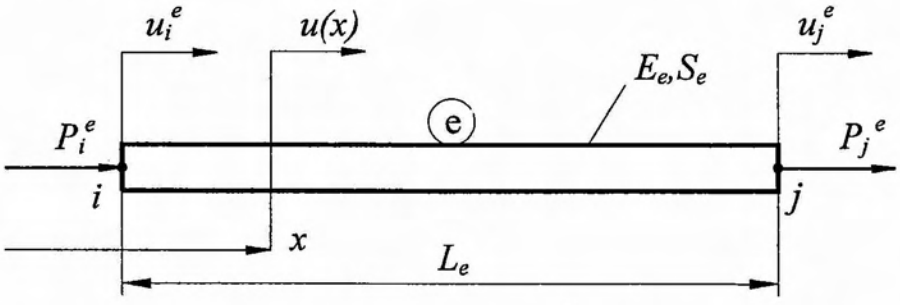
Rozdelenie telesa na konečné prvky je v takomto prípade jednoduchý proces; v mieste každej náhlej zmeny prierezu alebo zaťaženia musí byť *uzlový bod* (*uzol*) a časť telesa medzi dvomi uzlovými bodmi predstavuje *konečný (prútový) prvok*. Vznikla tak úloha s tromi prvkami a štyrmi uzlovými bodmi (obr. 1.3b), tzv. *výpočtový model* úlohy. Všimnime si, že pre silové reakcie F_1 a F_3, ktoré nahradzujú účinok väzieb, sme zvolili zmysel podľa kladného zmyslu tzv. *globálneho súradnicového systému* platného pre celé teleso (súradnica x v obrázku), napriek tomu, že v skutočnosti pôsobia opačne. Je to dôležitá zásada numerických (počítačových) metód platná nielen pri *zadávaní* vektorov a ich zložiek, ale aj pri ich *vyhodnocovaní* vo výsledkoch. V tomto prípade dostaneme číselné veľkosti reakcií F_1 a F_3 so záporným znamienkom, čo znamená, že ich vektory pôsobia v opačnom zmysle ako má os x globálneho súradnicového systému zvoleného pre riešenie úlohy.



Obrázok 1. 3 Jednorozmerná úloha;
a) vstupné údaje (geometrický model)
b) rozdelenie na prvky a očíslovanie uzlových bodov (výpočtový model)

2. ***Určenie parametrov všeobecného prvku***

Z formálneho hľadiska sú všetky prvky úlohy charakterizované rovnakými parametrami. Ak si zo zaťaženého telesa pomocou myslených rezov tesne vedľa (presnejšie povedané nekonečne blízko) uzlov vydelíme *všeobecný, ľubovoľný, e-ty prvok (element) s lokálnym číslovaním uzlov i, j* (obr. 1.4), potom vidieť, že v našom prípade vstupné (známe, zadávané) parametre sú: E_e, S_e, a $L_e = x_j - x_i$.



Obrázok 1. 4 Jednorozmerný prútový (konečný) prvok

V myslených rezoch sa objavili neznáme silové účinky odstránených častí telesa prenášané cez uzly, tzv. *vnútorné uzlové sily* P_i^e a P_j^e. Prívlastok vnútorné je tu dôležitý, pretože v uzloch môžu pôsobiť aj známe zadané vonkajšie uzlové sily (pozri obr. 1.3). Pripomíname tiež, že koncové body prvku sú nekonečne blízko uzlov a preto prívlastok uzlové je aj na prvkoch oprávnený. Globálne *x*-ové *posunutia uzlov* u_i^e a u_j^e sú tiež neznáme. Na základe vzorcov elementárnej pružnosti ťahaného/tlačeného prúta sa ľahko presvedčíme (pozri príklad 1.1), že medzi posunutiami uzlov a uzlovými (koncovými) silami prúta platí maticový vzťah

$$\mathbf{q}^e = \begin{bmatrix} P_i^e \\ P_j^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_e & -k_e \\ -k_e & k_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^e \\ u_j^e \end{bmatrix} = \mathbf{K}^e \mathbf{a}^e \qquad (1.3\text{-}1)$$

kde $k_e = \dfrac{E_e S_e}{L_e}$, je tzv. tuhosť prúta (je to sila, ktorá by natiahla prút o jednotku dĺžky) a matica $\mathbf{K}^e$ je *symetrická matica tuhosti prvku*. Ak sa nám podarí vypočítať pre prvok *uzlové posunutia prvku* $\mathbf{a}^e$, budeme vedieť podľa (1) určiť aj *vnútorné uzlové sily prvku* $\mathbf{q}^e$. Potom už môžeme určovať aj ostatné, z primárnych neznámych odvodené, neznáme. Pri pevnostnej úlohe sú to napr. pomerné deformácie (pretvorenia) prvkov

$$\varepsilon^e = \frac{\Delta L_e}{L_e} = \frac{u_j^e - u_i^e}{L_e} \qquad (1.3\text{-}2)$$

a napätia

$$\sigma^e = E_e \varepsilon_e = \frac{E_e}{L_e}\left(u_j^e - u_i^e\right) \qquad (1.3\text{-}3)$$

Ak za *primárne* neznáme budeme považovať posunutia uzlov (a nie vnútorné uzlové sily), potom hovoríme o *deformačnej formulácii* MKP, ktorá sa pri pevnostných úlohách skoro zásadne používa. Hlavný dôvod spočíva v tom, že pri deformačnej formulácii sa ľahšie určujú okrajové podmienky. Pri reálnych úlohách máme totiž omnoho viac informácií o väzbách (upevneniach) telesa ako o silových reakciách, ktoré vznikajú v týchto miestach.

Príklad 1.1

Zo zaťaženej prútovej konštrukcie sme pomocou myslených rezov v bodoch i a j vybrali prút s dĺžkou L_e (obr. 1.4). Nech prierez prúta je S_e a modul pružnosti v ťahu E_e. Treba určiť vzťahy medzi koncovými silami P_i^e, P_j^e a koncovými posunutiami u_i^e, u_j^e. (Kvôli jednoduchosti zápisu vynecháme označenie e-teho elementu.)

Zo silovej podmienky rovnováhy prúta vyplýva

$$P_i = - P_j \tag{a}$$

Predĺženie prúta je

$$u_j - u_i = \frac{P_j L}{ES} \tag{b}$$

a z toho dostávame

$$P_j = \frac{ES}{L}\left(u_j - u_i\right) \tag{c}$$

Vzhľadom na (a) platí

$$P_i = \frac{ES}{L}\left(u_i - u_j\right) \tag{d}$$

Ak rovnice (c) a (d) napíšeme v maticovom tvare

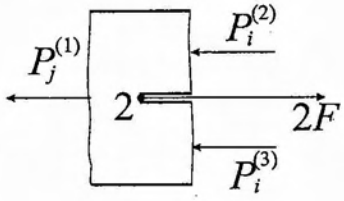
$$\mathbf{q}^e = \begin{bmatrix} ES/L & -ES/L \\ -ES/L & ES/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \mathbf{K}^e \mathbf{a}^e \tag{e}$$

určili sme maticu tuhosti jednorozmerného prúta $\mathbf{K}^e$.

3. *Sústava uzlových rovníc*

Neznáme uzlové veličiny určujeme z rovnovážnych (bilančných) podmienok (rovníc), ktoré platia pre uzly, t. j. pre miesta, kde sa jedine uskutočňuje interakcia prvkov výpočtového modelu. Tieto podmienky vyplývajú z fyzikálnej podstaty úlohy a ich počet sa rovná celkovému počtu neznámych.

V našom príklade máme 4 neznáme: posunutia uzlov 2 a 4 a reakcie v uzloch 1 a 3. Potrebné rovnice dostaneme zo *silových podmienok rovnováhy uzlov*. Pomocou myslených rezov tesne vedľa uzlov vyberieme z telesa jeho štyri uzly a napíšeme pre ne podmienky rovnováhy vonkajších a vnútorných síl. Treba pri tom dodržiavať definíciu znamienka (zmyslu) vnútorných uzlových síl podľa obr. 1.4, lebo len vtedy platí vzťah (1), ktorý budeme pri riešení úlohy využívať. (Na obr. 1.4 sú znázornené sily, ktorými pôsobia uzly na prvok; prvok na uzly pôsobí rovnako veľkými silami ale opačného zmyslu). Silové podmienky rovnováhy uzlov sú (pozri pomocný obrázok pre uzol 2)



$$\left.\begin{aligned} P_i^{(1)} &= F_1 \\ P_j^{(1)} + P_i^{(2)} + P_i^{(3)} &= 2F \\ P_j^{(3)} &= F_3 \\ P_j^{(4)} &= F \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

Pomocou (1) nahradíme v tejto sústave vnútorné uzlové sily posunutiami uzlov (lokálne číslovanie posunutí uzlov nahradíme globálnym číslovaním podľa obr. 1.3 b)

$$\left.\begin{aligned} k_1u_1 - k_1u_2 &= F_1 \\ -k_1u_1 + k_1u_2 + k_2u_2 - k_2u_3 + k_3u_2 - k_3u_4 &= 2F \\ -k_2u_2 + k_2u_3 &= F_3 \\ -k_3u_2 + k_3u_4 &= F \end{aligned}\right\} \qquad (1.5)$$

čím sme prešli na deformačnú formuláciu úlohy. Po zavedení okrajových podmienok $u_1 = u_3 = 0$ dostávame z (5) posunutia voľných uzlov $u_2 = 6/5\ FL/(ES)$ a $u_4 = 11/5\ FL/(ES)$ a reakcie $F_1 = -12/5\ F$; $F_3 = -3/5\ F$. Pomocou (3) určíme napätia v prvkoch $\sigma^{(1)} = 6/5\ F/S$; $\sigma^{(2)} = -3/5\ F/S$; $\sigma^{(3)} = F/S$ a tým je úloha vyriešená.

Prehľadnosť pri väčších úlohách i teoretické a algoritmické postupy MKP vyžadujú dôsledný maticový zápis. V tomto zápise bude sústava (5) mať tvar

$$\mathbf{Ka} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2+k_3 & -k_2 & -k_3 \\ 0 & -k_2 & k_2 & 0 \\ 0 & -k_3 & 0 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ 2F \\ F_3 \\ F \end{bmatrix} = \mathbf{f} \qquad (1.6)$$

kde **K** je matica tuhosti, **a** vektor posunutí a **f** vektor uzlových síl telesa. Matica tuhosti telesa je pozitívne definitná, symetrická a pri väčších úlohách výrazne pásová. Všetky tieto jej vlastnosti sa využívajú pri efektívnom riešení výslednej sústavy rovníc veľkých úloh. Jej rozborom ľahko zistíme, že vznikla ako súčet tzv. *rozšírených matíc tuhosti prvkov* $\underline{\mathbf{K}}^e$.

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{NET} \underline{\mathbf{K}}^e = \underline{\mathbf{K}}^1 + \underline{\mathbf{K}}^2 + \underline{\mathbf{K}}^3 = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & -k_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & 0 & k_3 \end{bmatrix} \qquad (1.7)$$

Podľa postupu naznačeného v (7) sa v programoch MKP matica **K** tvorí veľmi efektívne priamo z matíc tuhosti prvkov, pričom sa využíva jej symetria a pásovosť na efektívne uloženie do pamäti počítača. Sústavu silových rovníc (4) v takomto procese možno vynechať, fyzikálny princíp však zostáva: každá z deformačne formulovaných rovníc v (5) a (6) predstavuje *silovú* rovnicu rovnováhy v uzlovom bode telesa. Tento princíp platí aj pri viacrozmerných úlohách, kedy sa pre uzol píšu podmienky rovnováhy pre každý jeho *stupeň voľnosti* (napr. posunutie v smere y, natočenie okolo osi z a pod.).

Z uvedeného princípu riešenia úlohy pomocou MKP vyplýva, že jeho základom je vytvorenie matice tuhosti všeobecného prvku v (1). Je to vždy štvorcová matica, ktorej stupeň (počet riadkov, resp. stĺpcov) je rovný počtu stupňov voľnosti prvku. Z rozboru vzťahu (1) a s pomocou obr. 1.4 si môžeme overiť všeobecnú definíciu elementov matice tuhosti prvku: Element matice tuhosti prvku k_{ij} je rovný sile v mieste i vyvolanej jednotkovým posunutím v mieste j, pričom prvok upevníme tak, že všetky ostatné stupne voľnosti odstránime. Symetria matice $k_{ij} = k_{ji}$ vyplýva z Maxwellovej – Bettiho vety o vzájomnosti posuvov. (Sila v mieste i od jednotkového posunutia v mieste j sa rovná sile v mieste j od jednotkového posunutia v mieste i.)

Poznámka: Analógia úloh a univerzálnosť programov MKP

Zmeňme teraz fyzikálny pohľad na úlohu zadanú na obr. 1.3 a uvažujme, že ide o jednorozmernú stacionárnu úlohu vedenia tepla. Geometria telesa zostáva nezmenená, ale mení sa fyzikálny význam niektorých vstupných parametrov a, pochopiteľne, zaťažení, okrajových podmienok i hľadaných neznámych. Postup riešenia úlohy pomocou MKP sa však vôbec nezmení a úlohu možno riešiť úplne analogicky:

Primárne neznáme sú teraz teploty u_2 a u_4 , pričom sme predpísali $u_1 = u_2 = 0$ °C. Konštanta E predstavuje koeficient vedenia tepla materiálu. Zaťaženie F predstavuje veľkosť zadaného tepelného toku. Vzťah medzi teplotami a tepelnými tokmi v uzloch prvku udáva (1), kde maticu $\mathbf{K}^{(e)}$ môžme teraz nazvať *maticou tepelnej vodivosti* prvku. Číselné výsledky riešenia sú totožné. (Znamienko mínus pri F_1 a F_3 znamená odvod tepla z uzla, kladné hodnoty F a $2F$ predstavujú prívod tepla do uzlov. Poznamenávame, že totožnosť číselných výsledkov sa narušuje pri viacrozmerných úlohách, pretože teplota je skalár a posunutie je vektor.)

Sústavu analogických uzlových rovníc možno vytvoriť aj pre riešenie potrubných systémov, hydraulických sietí, elektrických obvodov a pod.

Pretože pri MKP aj úlohy pre spojité kontinuum sa vždy diskretizujú a riešia rovnakým postupom, je prirodzené, že vznikli aj tzv. *univerzálne programové systémy MKP*, ktoré sú schopné efektívne riešiť v podstate všetky úlohy mechaniky a technickej fyziky, ktoré boli spracované v teórii MKP, v súčasnosti v rozsahu uvedenom v časti 1.2.

1.4 Program ANSYS – základné údaje

Študovať numerickú metódu bez jej cvičného používania na počítači je pomerne nudná a málo motivujúca záležitosť. Navyše teória v tejto práci slúži predovšetkým na aplikačné využívanie MKP a preto ju od začiatku budeme spájať s jednoduchými aplikačnými príkladmi. Príklady budeme počítať pomocou programu ANSYS [4], ktorý je u nás najviac rozšírený a bežne prístupný nielen na technických univerzitách, ale i v priemysle.

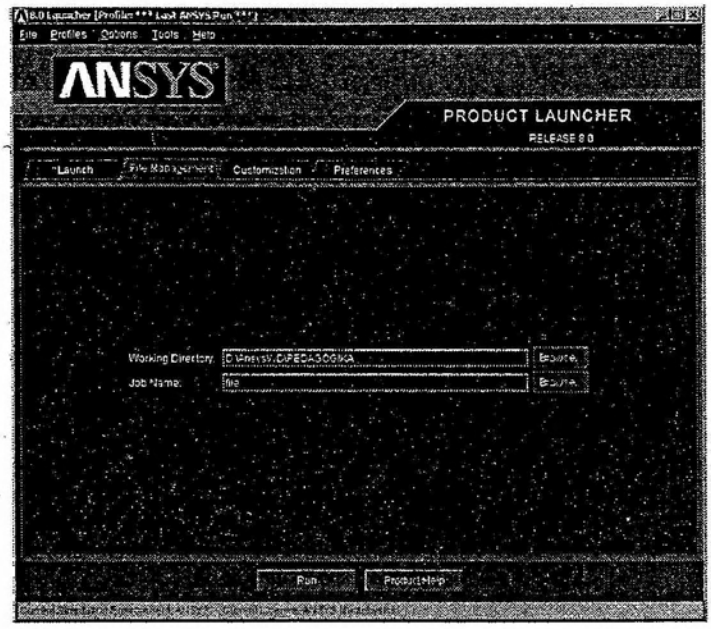
Program ANSYS je založený na MKP a dá sa charakterizovať ako univerzálny komerčný program na vykonávanie inžinierskych výpočtov z technickej fyziky a to predovšetkým z jednotlivých častí mechaniky. Je to zložitý program, ktorý vo svojej úplnosti (možno zakúpiť aj jeho špecializované, resp. limitované časti) má ešte širší záber ako možnosti uvedené v časti 1.2 a navyše dvakrát do roka vychádza jeho inovovaná a rozšírená verzia. V tejto časti opisujeme verziu 8.0 (najnovšia verzia v čase uzávierky práce). Výpočtové postupy opisované v príkladoch boli tvorené a overované vo verzii 7.1, a preto v starších verziách programu môžu niektoré príkazy chýbať.

Čo len trochu podrobnejší výklad programu je mimo rámca tejto práce (slúžia na to podrobné manuály, učiace postupy, overovacie príklady a *help*y dodávané s programom, príp. [5], [22] a i.). Pre začínajúcich užívateľov však v tomto odstavci uvedieme *najnutnejšie* informácie o programe tak, aby boli pripravení samostatne si zopakovať uvádzané príklady a na ich základe lepšie pochopiť teoretické základy MKP, jej aplikačné možnosti, postupne samostatne experimentovať s programom a vybudovať si tak základ jeho praktického využívania, resp. využívania iných programov založených na MKP.

Spúšťanie programu

Po inštalácii programu treba najprv odštartovať príkaz na základné nastavenie programu pre užívateľa (*Configure ANSYS Products*), ktorý otvorí okno znázornené na obrázku 1.5.

Dve najdôležitejšie voľby nájdeme po kliknutí na ponuku pre správu súborov (*File Management*). Sú to: *Working Directory* (pracovný adresár) – kde si zvolíme adresár na ukladanie súborov, ktoré program vytvorí, resp. odkiaľ chceme načítať súbor, s ktorým sme už pracovali. Druhá dôležitá voľba je *Job Name* (názov úlohy), kde uvedieme názov úlohy, ktorú ideme s programom riešiť. Ak uvedieme názov *Nosnik*, program bude v pracovnom adresáre vytvárať súbory s týmto názvom a príslušnou príponou. Najdôležitejší bude súbor *Nosnik.db*, obsahujúci všetky základné údaje (databázu) úlohy. Pokiaľ o tento súbor nejakým spôsobom prídeme (neuloženie na disk, vymazanie, prepísanie), môžeme začať znova – zostali síce skúsenosti, ale celá práca vyšla nazmar! Preto je nebezpečné pri dôležitejších úlohách ponechávať programom ponúkaný názov *file*, pretože ďalšia úloha s tým istým názvom ho pri niekoľkonásobnom ukladaní prepíše bez varovania.



Obrázok 1. 5 Štartovacie okno programu Ansys

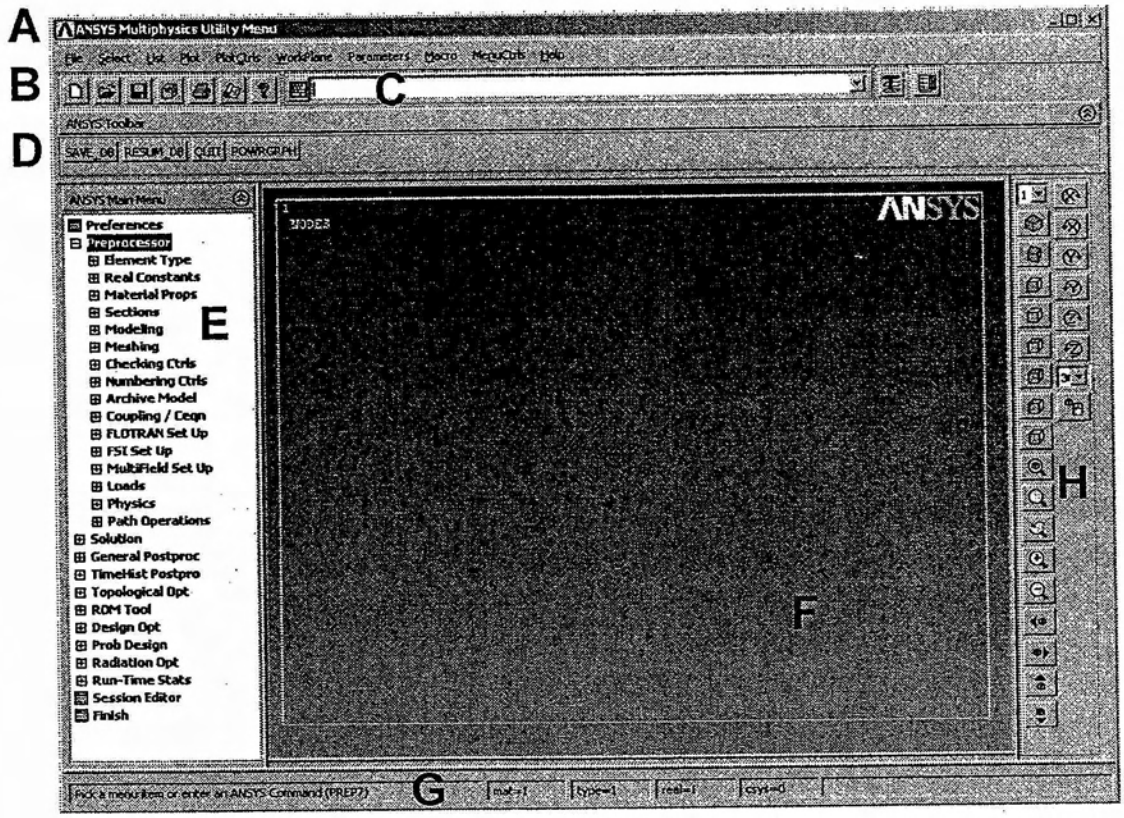
Pracovná plocha programu

Po interaktívnom spustení programu sa na obrazovke monitora objaví pracovná plocha programu zhruba v usporiadaní, ktoré vidieť na obrázku 1.6. Zhruba hovoríme preto, lebo poloha jednotlivých okien i ich veľkosť sa môžu pri rôznych verziách programu a typoch počítačov trochu líšiť.

Základné okná programu sme v obrázku 1.6 označili veľkými písmenami A až H a uvádzame ich stručný popis:

A – ***Utility Menu*** je roletové menu, ktoré obsahuje tieto skupiny príkazov:
File - práca so súbormi
Select – výber entít a iných údajov z databázy úlohy
List – výpis zoznamov entít a iných údajov z databázy úlohy a výsledkového súboru
Plot – kresliace príkazy
Plot Controls – riadiace príkazy grafiky
Work Plane – práca s pomocnou mriežkovanou rovinou a so súradnicovými systémami
Parameters – práca s parametrami
Macro – tvorba a využívanie makro príkazov

Menu Controls – zapínanie, vypínanie a úpravy jednotlivých menu
Help – prístup k manuálom a pomôckam
Výber príkazov z *Utility Menu* (a aj z iných skupín príkazov) budeme vyznačovať postupnosťou otvárania okien takto:
Utility menu >Plot Controls >Plot, Zoom, Rotate... – takto by sme otvorili okno *Plot, Zoom, Rotate* s príkazmi na riadenie grafiky, s ktorých najdôležitejšie sú už priamo k dispozícii vo forme ikoniek v časti **H**.



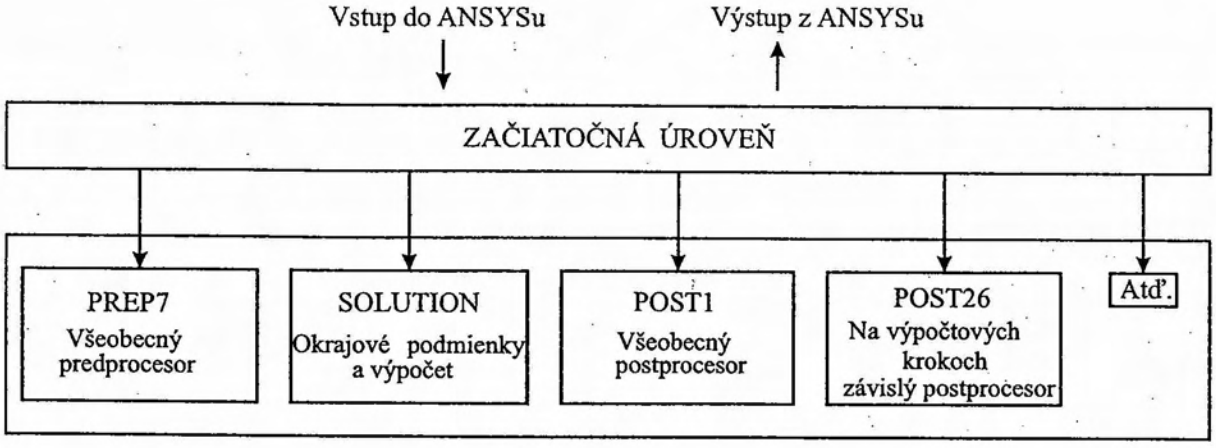
Obrázok 1. 6 Pracovná plocha programu ANSYS (*Grafical User Interface)*

B – ***Standard Toolbar*** obsahuje grafické tlačítka na spúšťanie často používaných príkazov.

C – ***Input Window.*** Slúži hlavne na priame zadávanie a vykonávanie príkazov programu. Ak do okna napíšeme ľubovoľný platný príkaz (zoznam príkazov programu nájdete v *Helpe*) a odošleme ho z klávesnice klávesou *Enter*, program ho vykoná. Pod oknom sa evidujú takto vykonané príkazy a možno ich prekopírovať do aktívnej časti okna a opätovne vykonať. Tlačidlo vpravo od okna zviditeľňuje otvorené ale inou grafikou prekryté okná.

D – **ANSYS *Toolbar***. Obsahuje tlačidlá na vykonanie často sa opakujúcich funkcií a príkazov programu. Možno ho doplniť a upraviť podľa potreby.

E – ***Main Menu***. Toto menu, ako o tom svedčí aj jeho názov, obsahuje v sebe najdôležitejšie skupiny výkonných príkazov programu. Pri jeho využívaní nezaškodí poznať aspoň základné údaje o koncepcii programu. Program ANSYS je organizovaný na dvoch úrovniach: *Begin level* (začiatočná úroveň) a *Processor level* (procesorová úroveň). Pri otvorení programu sme na začiatočnej úrovni; z tejto úrovne môžeme cez *ANSYS Main Menu* vstupovať do tzv. *procesorov* (špecializovaných častí) programu, ako je to ukázané na obrázku 1.7. Začiatočná úroveň však neslúži len ako brána na vstup a výstup z programu, ale využíva sa aj na niektoré globálne (nadprocesorové) práce s programom.



Obrázok 1. 7 Organizácia programu ANSYS

Ako si ukážeme na viacerých príkladoch, práca s programom začína vo všeobecnom predprocesore (*Preprocessor*), kde sa vytvára geometrický a výpočtový model telesa, resp. oblasti. V časti *Solution* sa zadávajú „zaťaženia", okrajové a začiatočné podmienky a vykonáva sa vlastný výpočet. V časti všeobecného postprocesora (*General Postprocessor)* sa vyhodnocujú a spracovávajú výsledky výpočtu na úrovni celého telesa (oblasti) pre určitý zaťažovací alebo časový krok. V postprocesore *Time-History Postprocessor* sa vyhodnocujú a spracovávajú výsledky výpočtu síce už len na úrovni vybraného uzla, resp. elementu avšak v celom intervale časových, resp. zaťažovacích krokov.

F – ***Graphics Window***. Okno zobrazujúce grafické informácie počas práce na úlohe.

G – ***Status and promt area*** podáva niektoré informácie o riešení úlohy. Pri interaktívnom vykonávaní niektorých zložitejších viackrokových príkazov možno začiatočníkovi odporúčať, aby si všímal najmä ľavú časť tohoto stavového riadku, pretože ho v ňom program informuje o potrebných ďalších krokoch na správne a kompletné dokončenie príkazu.

Pod pracovnou plochou programu sa nachádza ***Output Window,*** v ktorom sa zobrazujú textové informácie o práci programu. Objaví sa po kliknutí na jeho ikonu, ktorá sa nachádza v riadku *Start Menu* systému *Windows.*

Pri opise interaktívnej práce budeme používať značky s týmto významom :

>	otvorí sa submenu
...	otvorí sa dialógové okno, resp. okno pre číselné zadanie údajov
↑	otvorí sa menu pre výber entít kliknutím (ukázanie entity šipkou a stlačenie ľavého tlačidla myši); treba kliknúť na entitu uvedenú za značkou *P:*

žiadna značka – príkaz, resp. funkcia sa po kliknutí okamžite vykoná

Uvedené informácie o programe ANSYS treba chápať len ako určitý úvod k jeho využívaniu. Na získanie prvých výpočtárskych skúseností pri jeho interaktívnom využívaní *slúžia príklady uvedené pri jednotlivých typoch úloh,* ktoré zároveň slúžia aj na numerickú ilustráciu základných vzťahov a postupov MKP.

Príklad 1.2

Riešte pevnostnú úlohu pre tiahlo zadané na obr. 1.3a s programom ANSYS v interaktívnom móde pre fiktívne hodnoty $F = 1$ N, $L = 1$ m, $S = 1$ m^2 , $E = 1$ N/m^2. Použite prvok *LINK 1* určený pre riešenie rovinných prútových konštrukcií. (Pozn.: Fiktívne jednotkové hodnoty nám umožnia jednoducho porovnať vypočítané výsledky s analytickým riešením uvedeným v časti 1.3, ktoré sú uvedené na strane 15)

1. Zadanie názvu úlohy
Utility Menu>File>Change Jobname... /FILNAM = PRUT;

2. Otvorenie predprocesora
Main Menu>Preprocessor

3. Zadanie typu prvku pre úlohu
Preprocessor>Element Type>Add/Edit/Delete, Add... Link 2D Spar, OK, Close;

4. Zadanie dvoch prierezových skupín (prierezových konštánt)
Preprocessor>Real Constants>Add/Edit/Delete, Add... (Typ 1 Link1), OK, Area = 1, OK, *Add...*
(Typ 1 Link1), OK, Area = 2, OK, Close;

5. Zadanie materiálovej skupiny
Preprocessor>Material Props>Material Models... (Material Model Number 1), Structural, Linear, Elastic, Isotropic, EX = 1, PRXY = 0.3, OK, Material, Exit;

6. Vytvorenie uzlových bodov úlohy
Preprocessor>-Modeling-Create>Nodes>In Active CS... X = 0, Y = 0, Apply,
X = 1, Y = 0, Apply,
X = 3, Y = 0, Apply,
X = 2, Y = 0, OK;

7. Aktualizácia údajov pre prvok s prierezom 2*S*
Preprocessor >Modeling>Create Elements>Elem Attributes... TYPE = 1 Link 1,
MAT = 1,
REAL = 2, OK;

8. Vytvorenie prvku s prierezom 2*S*
Preprocessor>Modeling>Create>Elements>Auto Numbered>Thru Nodes↑ P: Uzol 1, P: Uzol 2, OK;

9. Aktualizácia údajov pre ostatné prvky
Preprocessor > Modeling>Create> Elements>Elem Attributes... TYPE = 1 Link 1,
MAT = 1,
REAL = 1, OK;

10. Vytvorenie prvkov s prierezom *S*
Preprocessor>Modeling>Create>Elements>Auto Numbered>Thru Nodes↑ P: Uzol 2, P: Uzol 3, Apply, P: Uzol 2, P: Uzol 4, OK;

11. Ukončenie práce v predprocesore
Main Menu>Preprocessor>Finish

12. Upevnenie všetkých uzlov v smere osi Y
Main Menu>Solution>Define Loads>Apply>Structural>Displacement>On Nodes↑
Pick All, Vyznačiť UY, OK;

13. Upevnenie uzla 1 a 3 v smere osi X
Solution>Define Loads>Apply>Structural>Displacement>On Nodes↑ P: Uzol 1, P: Uzol 3, OK, Vyznačiť UX , OK;

14. Zadanie síl do uzlov 2 a 4
Solution>Define Loads>Apply>Structural>Force/Moment>On Nodes↑
P: Uzol 2, OK, FX Value = 2, Apply, P: Uzol 4, OK, FX Value = 1, OK;

15. Príkaz na vykonanie výpočtu
Solution> Solve> Current LS... Prečítajte si informácie o úlohe v bielom okne a zavrite ho. Kliknite na OK v zelenom (šedom) okne. Ak ste neurobili chybu v postupe, prebehne výpočet a objaví sa žlté okno s informáciou *Solution is done!*

16. Ukončenie práce v *Solution*
Main Menu>Solution>Finish

17. Vypísanie reakcií F_x
Main Menu>General Postproc>List Results>Reaction Sol... Struct force FX, OK;

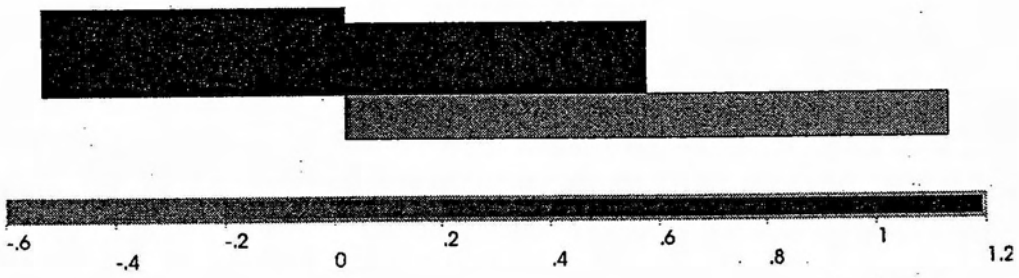
```
PRINT FX REACTION SOLUTIONS PER NODE
THE FOLLOWING X,Y,Z SOLUTIONS ARE IN GLOBAL COORDINATES
     NODE      FX
        1  -2.4000
        3  -0.6000
```

18. Vypísanie posunutí uzlov v smere osi X
Main Menu>General Postproc>List Results>Nodal Solution... DOF Solution, Translation UX, OK;

```
PRINT U     NODAL SOLUTION PER NODE
THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN GLOBAL COORDINATES
    NODE       UX
       1   0.0000
       2   1.2000
       3   0.0000
       4   2.2000
```

19. Selekcia napätí prvkov z výsledkovej databázy
General Postproc>Element Table>Define Table, Add... Do okna LAB napíšte: NAPATIA, Vyznačte v ľavom okne: *By sequence num*; Napíšte do pravého spodného okna: LS, 1, OK, Close;

20. Nakreslenie priebehu napätí po prvkoch
General Postproc>Plot Results>Contour Plot>Line Elem Res... Do okna LABI načítajte: NAPATIA, Do okna LABJ načítajte: NAPATIA, OK:



21. Ukončenie práce s úlohou
Ansys Toolbar>Quit>Save Geom+Loads, OK;
alebo
Utility Menu>File>Exit... Save Geom+Loads, OK;
alebo
Kliknite na krížik v pravom rohu *Utility Menu> Save Geom+Loads, OK;*

Poznámky k príkladu 1.2

Príklad z hľadiska realizácie nemusí byť pre začiatočníka jednoduchý a preto prikladáme niekoľko rád:

1. ***Oprava chýb***: Pokiaľ urobíme chybu pri tvorbe uzlov, prvkov a prípadne iných entít, tak chybu opravujeme analogicky, ako sme príslušnú entitu tvorili. V postupnosti interaktívnych príkazov však nahradzujeme príkaz *create* (vytvor) príkazom *delete* (vymaž). Entity, ktoré chceme odstrániť vyznačujeme kliknutím, alebo ich čísla napíšeme do *Input* okna (po vypísaní nezabudnúť na *Enter*). Napr. vymazanie všetkých prvkov sa vykoná príkazom

   Preprocessor>Modeling>Delete>Elements...↑ Pick All;

2. ***Kontrola vstupných údajov***

   Pretože pri tvorbe vstupných údajov úlohy môžeme urobiť chyby aj nevedomky, pred spustením výpočtu ich treba dôkladne skontrolovať. Niektoré chyby sa pri spustení výpočtu prejavia tak, že sa objaví červené okno s informáciou o tom, že úloha je zle zadaná. Ale aj v prípade, že výpočet prebehne a objaví sa okno s informáciou, že výpočet sa vykonal (a teda výsledky sa zapísali do výsledkovej databázy), môžeme mať vo vstupe chyby, ktoré síce programu nevadili, ale spôsobili, že výsledky sú nesprávne. Kontrolu môžeme robiť viacerými spôsobmi:

   - Vypísaním údajov: *Utility Menu>List>Properties>* (Zvoľte údaje na výpis)
     Utility Menu>List>Loads> (Zvoľte údaje na výpis)
   - Vykreslením častí modelu: *Utility Menu>Plot>*(Zvoľte údaje na nakreslenie)
   - Číslovaním entít: *Utility Menu>PlotCtrls>Numbering...* (Zvoľte entitu na očíslovanie)
   - Vykreslením symbolov: *Utility Menu>PlotCtrls>Symbols...* (Zvoľte symbol na nakreslenie)
   - Vykreslením prierezových údajov: *Utility Menu>PlotCtrls>Style>Size and Shape...*
     /ESHAPE, ON, SCALE = 1, OK;

3. ***Ukladanie vstupných údajov***

   Po každej úspešne vykonanej časti tvorby geometrického alebo výpočtového modelu odporúčame ho uložiť na disk pomocou príkazu *SAVE_DB* kliknutého z okna *TOOLBAR*. K tejto časti sa potom môžeme v prípade potreby (po urobení chyby) vrátiť pomocou príkazu *RESUM_DB* z toho istého okna. Ukladanie vstupnej databázy odporúčame najmä pred spustením „nebezpečného" príkazu, ktorého následky pri zlom zadaní by sa ťažko odstraňovali (napr. príkaz na viacnásobné kopírovanie a pod.).

4. ***Výpis a grafické znázorňovanie výsledkov***

   Program poskytuje veľa možností, ktoré sa budú v aplikačných príkladoch postupne objavovať. V tomto príklade možno využiť napr. tieto:

   Ansys Main Menu>General Postproc>List Results
   Ansys Main Menu>General Postproc>Plot Results>Contour Plot
   Ansys Main Menu>General Postproc>Plot Results>Vector Plot

   Pri čiarových prvkoch je však výsledková grafika názornejšia pri použití tzv. prvkovej tabuľky (*Element Table)*, do ktorej si treba pre daný typ prvku vyhľadať v manuáli programu názov veličiny a jej parameter. Tento postup sme použili v príkaze č. 19 pre vykreslenie napätí prvkov. Vykresľovanie ďalších výsledkov je analogické, len treba nahradiť použitý názov a parameter pre osové napätie (*LS,1*) niektorým z tých, ktoré nájdeme v časti *Output Data* prvku LINK1 postupnosťou *Utility Menu>Help>Help Topics>Ansys Element Reference>Element Library>* LINK1. Jednoduchšie sa tam dostaneme tak, že do *Input Window* napíšeme Help, LINK1 a potvrdíme klávesou *Enter*.

2 STATICKÉ PEVNOSTNÉ ÚLOHY

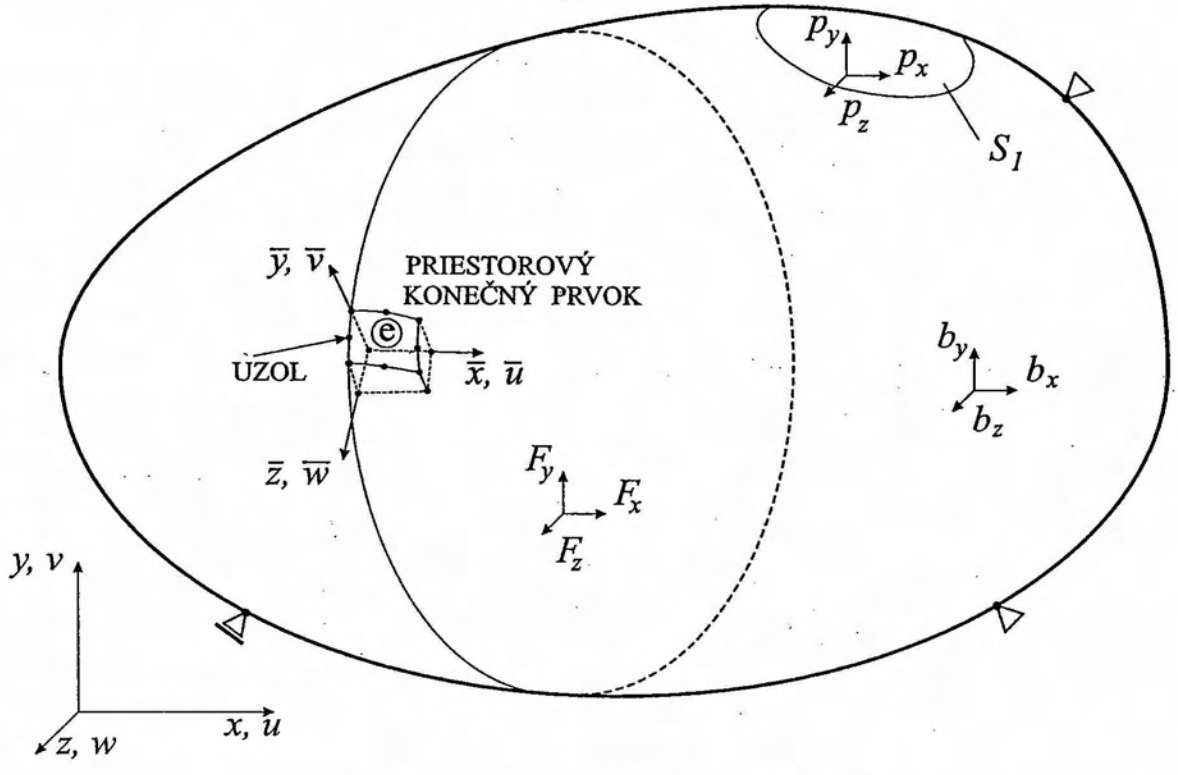
Na úvod treba povedať, že pevnostné úlohy pre teleso (konštrukciu) z poddajného (napr. kovového) materiálu tvoria takú širokú oblasť použitia MKP (pozri odsek 1.2), že sa z nej môžeme z priestorových dôvodov venovať len niektorým základným typom a postupom. Budeme analyzovať len lineárne úlohy z izotropného materiálu. Preberaný teoretický základ a ukážkové aplikácie by však mali byť dostatočné na samostatné zvládnutie aj zložitejších úloh, snáď len s výnimkou nelineárnych úloh, ktorých rozbor je mimo rozsahu tejto práce.

2.1 Formulácia úlohy

Uvažujme všeobecné priestorové teleso z pružného izotropného materiálu v pravouhlom pravotočivom *globálnom* súradnicovom systéme *x, y, z* v rovnovážnom stave (obr.2.1). Teleso je zaťažené objemovými silami **b** (napr. vlastná tiaž), plošnými silami **p** (napr. plošný tlak) a sústredenými silami pôsobiacimi v bodoch telesa **F**. V týchto silách sú zahrnuté všetky *vonkajšie sily* pôsobiace na teleso (vrátane reakcií) a budeme s nimi pracovať v zložkovom tvare

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_x(x,y,z) \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x(x_1,y_1,z_1) \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \qquad (2.1\text{-}1)$$

Objemové sily sú funkciami polohy všeobecného bodu telesa, plošné sily sú funkciami polohy bodu na ploche pôsobenia (plocha S_1 v obr. 2.1) a pre sústredené sily musia byť známe súradnice bodov ich pôsobenia. Pretože sily pôsobiace na teleso sú ustálené (konštantné), nezávisia od času, budeme v takomto prípade hovoriť o *statickej úlohe*.



Obrázok 2.1 Všeobecné priestorové teleso

Posunutie (premiestnenie), o ktoré sa priestorovo premiestni všeobecný bod telesa pri zaťažení, označíme

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u(x,y,z) \\ v \\ w \end{bmatrix} \tag{2.1-2}$$

kde *u, v, w* sú funkcie pravouhlých *zložiek posunutia* v globálnom súradnicovom systéme (obr. 2.1).

Deformáciu (pretvorenie) vo všeobecnom bode telesa označíme

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left[\varepsilon_x(x,y,z),\ \varepsilon_y,\ \varepsilon_z,\ \gamma_{xy},\ \gamma_{yz},\ \gamma_{zx}\right]^T \tag{2.1-3}$$

a zložky napätia tiež usporiadajme do *vektora* (v skutočnosti pretvorenie i napätie v bode telesa sú tenzory 2. rádu s deviatimi zložkami)

$$\boldsymbol{\sigma} = \left[\sigma_x(x,y,z),\ \sigma_y,\ \sigma_z,\ \tau_{xy},\ \tau_{yz},\ \tau_{zx}\right]^T \tag{2.1-4}$$

Ako sme už spomenuli, budeme sa zaoberať len *lineárnymi úlohami*. V ďalšom teda budeme predpokladať, že posunutia bodov telesa sú malé (lineárna závislosť medzi zaťažujúcimi silami a **u**), že v telese vznikajú malé deformácie (lineárna závislosť medzi **ε** a **u**), že platí Hookeov zákon (lineárna závislosť medzi **σ** a **ε**) a že nejde o kontaktnú úlohu (lineárna závislosť medzi zaťaženiami a reakciami). Inými slovami povedané: medzi vstupnými (zadanými) a výstupnými (hľadanými) veličinami je lineárna závislosť. Potom medzi **ε** a **u** platia lineárne *geometrické (Cauchyho) rovnice* (pozri napr. [6])

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ &\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ &\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{2.1-5}$$

Lineárne vzťahy medzi napätím a deformáciami zapisujeme vo forme tzv. *fyzikálnych rovníc*, ktoré pre izotropný materiál sú

$$\begin{aligned} &\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \mu\sigma_y - \mu\sigma_z\right) \qquad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy} \\ &\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(-\mu\sigma_x + \sigma_y - \mu\sigma_z\right) \qquad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy} \\ &\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(-\mu\sigma_x - \mu\sigma_y + \sigma_z\right) \qquad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy} \end{aligned} \tag{2.1-6}$$

kde E je modul pružnosti v ťahu a μ Poissonovo číslo materiálu.

Zo (6) vyjadríme napätia a rovnice zapíšeme v maticovom tvare

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\,\boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.1-7}$$

kde **D** je symetrická matica materiálových konštánt izotropného materiálu

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1-\mu & \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 1-\mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & \mu & 1-\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} \end{bmatrix} \tag{2.1-8}$$

Účinok teplotného zaťaženia možno v analýze zohľadniť pomocou deformácií od teplotného poľa

$$\boldsymbol{\varepsilon}_T = \alpha \Delta T(x,y,z)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{2.1-9}$$

kde:

α = koeficiet lineárnej teplotnej rozťažnosti materiálu
$\Delta T = T(x,y,z) - T_{ref}$ = teplotný rozdiel
T_{ref} = referenčná (vzťažná) teplota

Potom pre zadržané teplotné napätie platí

$$\boldsymbol{\sigma}_T = -\,\mathbf{D}\,\boldsymbol{\varepsilon}_T \tag{2.1-10}$$

a po superpozícii so (7) dostávame vzťah pre výsledné napätie

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\,(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_T) \tag{2.1-11}$$

Na základe uvedených pojmov a vzťahov už teraz môžeme povedať, čo sú z inžinierskeho hľadiska *hlavné ciele riešenia všeobecnej pevnostnej úlohy*: Pri udaných zaťaženiach, upevneniach a materiálových vlastnostiach treba v ľubovoľnom bode telesa s dostatočnou presnosťou určiť zložky vektorov posunutia, pretvorenia a napätia pre posúdenie jeho tuhostných a pevnostných vlastností a schopností.

Pri pevnostnom posudzovaní zaťaženého telesa zohrávajú významnú úlohu zložky napätia (4). Pokiaľ sa nám podarí určiť v bode telesa týchto 6 zložiek, potom pre posúdenie miery namáhania je potrebné z nich určiť vhodnejšie hodnoty a to hlavné napätia σ_1, σ_2, σ_3 a najmä tzv. *redukované (porovnávacie) napätie* (pozri napr. [6]). Redukované napätie je jednoosové ťahové napätie (a teda možno ho priamo porovnávať s jednoosovými charakteristikami materiálu ako je medza sklzu, medza pevnosti, dovolené napätie a pod.), ktoré svojou hodnotou vyjadruje zhruba rovnakú mieru namáhania v bode telesa, akú má príslušná viacosová napätosť v danom bode. Treba povedať, že redukované napätia sa počítajú na základe tzv. hypotéz pevnosti a v programoch MKP (ale i normách pevnostných výpočtov) sa pri kovových materiáloch stretávame najčastejšie len s dvomi:

- *Intenzita napätia* (redukované napätie podľa Trescovej hypotézy – hypotézy maximálneho šmykového napätia)

$$\sigma_{int} = \sigma_1 - \sigma_3 \tag{2.1-12}$$

- *Ekvivalentné napätie* resp. *von Misesovo napätie* (redukované napätie podľa hypotézy energie napätosti šmykových napätí)

$$\sigma_{eqv} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)} \tag{2.1-13}$$

Keď sa teraz spätne pozrieme na formuláciu pevnostnej úlohy, zistíme, že primárnymi neznámymi sú funkcie zložiek posunutia *u, v, w* vo vektore (2). Všetky ostatné hľadané funkcie - deformácie, napätia - možno z nich vyjadriť, resp. odvodiť.

Na odvodenie rovníc vhodných pre numerické riešenie uvedenej lineárnej pevnostnej úlohy využijeme princíp minima celkovej potenciálnej energie telesa (sú možné i iné postupy, ktoré vedú k tomu istému výsledku – napr. [8]). Túto energiu vyjadruje vzťah (bližšie pozri napr. [7])

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\sigma}\ \mathrm{d}V - \int_V \mathbf{u}^T\mathbf{b}\ \mathrm{d}V - \int_{S_1} \mathbf{u}^T\mathbf{p}\ \mathrm{d}S - \sum_{i=1}^{n} \mathbf{u}_i^T\mathbf{F}_i \tag{2.1-14}$$

kde prvý člen na pravej strane predstavuje energiu napätosti (energiu vnútorných síl) a ostatné členy potenciálnu energiu vonkajších síl vzťahovanú k stavu pred deformáciou (z toho vyplývajú záporné znamienka týchto členov).

Na celkovú potenciálnu energiu telesa Π (14) sa z matematického hľadiska môžeme pozerať ako na funkcionál, ktorého argumentom (premennou) je vektor $\mathbf{u}$, resp. funkcie *u, v,* a *w*, ktoré obsahuje tento vektor. Pri skutočných hodnotách posunutí *u, v,* a *w* tento funkcionál nadobúda minimálnu hodnotu, pretože pre zaťažené teleso v rovnovážnom stave platí *princíp minima celkovej potenciálnej energie.*

Princíp minima celkovej potenciálnej energie telesa hovorí, že zo všetkých možných stavov posunutí bodov zaťaženého telesa, ktoré zohľadňujú jeho geometrické okrajové podmienky (t. j. zadané posunutia – upevnenia), nastane ten, ktorý dáva minimálnu hodnotu celkovej potenciálnej energie telesa, takže platí

$$\Pi = \text{minimum} \tag{2.1-15}$$

To znamená, že ak vyjadríme $\boldsymbol{\sigma}$ a $\boldsymbol{\varepsilon}$ v (14) pomocou $\mathbf{u}$ a podarí sa nám nájsť také funkcie pre zložky $\mathbf{u}$, spĺňajúce okrajové podmienky, že hodnota Π bude pri nich minimálna, tak sme našli tie funkcie, ktoré vyjadrujú skutočné posunutia bodov telesa. Z nich vypočítané zložky napätia spĺňajú diferenciálne rovnice rovnováhy, rovnice kompatibility i statické okrajové podmienky telesa.

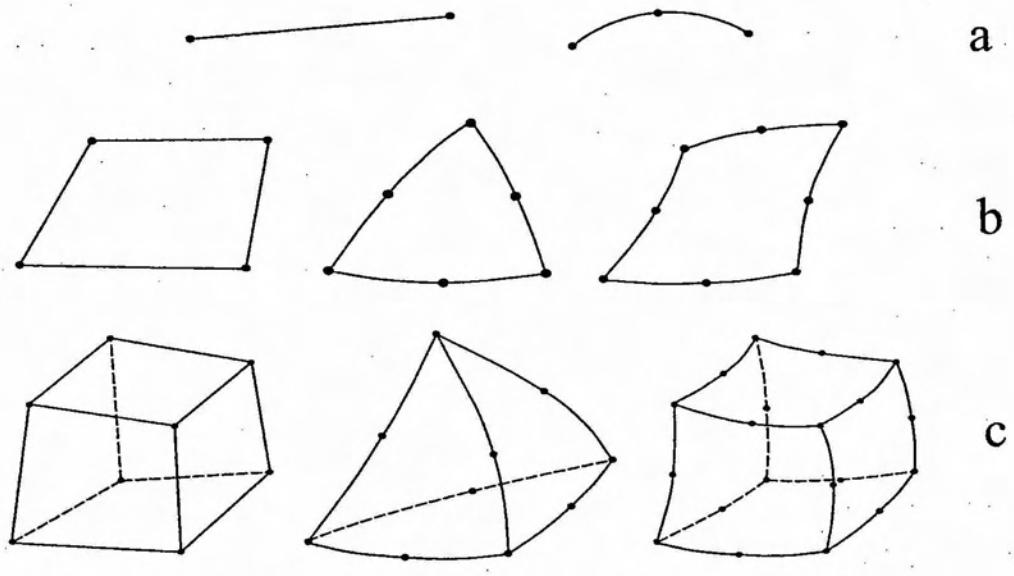
Princíp možno využiť aj na približné riešenie úlohy. Ak nájdeme, alebo si zvolíme skupinu funkcií $\mathbf{u}_i$, $i = 1, 2, ..., k, ..., n$, na približné vyjadrenie posunutí bodov telesa, ktoré všetky spĺňajú okrajové podmienky, potom funkcia $\mathbf{u}_k$, ktorá dáva minimálnu hodnotu potenciálnej energie Π, sa z uvažovaných funkcií najviac blíži presnému riešeniu.

Keďže pri uvedenom riešení úlohy primárnymi neznámymi sú posunutia, hovoríme o *deformačnej formulácii a o deformačnej metóde* riešenia úlohy – na rozdiel od silovej formulácie, kedy primárnymi neznámymi sú výslednice vnútorných síl, resp. napätia.

Pri niektorých špeciálnych telesách ako sú nosníkové (rámové) konštrukcie, potrubné systémy, dosky a škrupiny je výhodné do riešenia úlohy zaviesť ako hľadané primárne funkcie aj funkcie parciálnych *derivácií zložiek posunutia* podľa premenných x, y, z. Na formulácii i podstate riešenia úlohy sa tým nič nemení, fyzikálne tieto derivácie v bodoch telesa predstavujú vo všeobecnosti natočenia okolo osí rovnobežných s osami súradnicového systému a ich silovými partnermi sú zložky momentu sily. Často v tejto súvislosti treba pod pojmom posunutie rozumieť *zovšeobecnené posunutie* (posunutie, resp. natočenie) a pod pojmom sila - *zovšeobecnená sila* (sila, resp. moment sily).

2.2 Diskretizácia telesa

V MKP nebudeme pri vlastnom riešení úlohy hľadať funkcie zložiek posunutia, ale len ich hodnoty v uzlových bodoch telesa po jeho diskretizácii. Tento postup má jednoznačný pragmatický zmysel. Pri analytických metódach sa vyžaduje spojitosť funkcií po objeme celého telesa, čo pri reálnych konštrukčných častiach je splnené len výnimočne. Zložité telesá obsahujú geometrické, silové a materiálové nespojitosti: náhle zmeny prierezu, skokové zmeny zaťažení a materiálových vlastností a pod. Je naozaj ťažké si predstaviť existenciu funkcie, ktorá by bola schopná dostatočne presne vystihnúť napr. posunutia bodov hlavy valcov spaľovacieho motora pri mechanickom a teplotnom zaťažení. Tieto problémy MKP elegantne rieši diskretizáciou telesa na jednoduché podoblasti (konečné prvky), kde sa spojitosť hľadaných funkcií a prípadne ich derivácií bude vyžadovať len na konečnom prvku a *nespojitosti telesa sa umiestnia na hranice prvkov*.



Obrázok 2.2 Vybrané druhy často používaných konečných prvkov (a – čiarové, b – plošné, c – objemové)

Druh a tvar prvkov sa volí podľa tvaru telesa (obr. 2.2). Najjednoduchšie sú tzv. *čiarové prvky*, pri ktorých sa modeluje len ich *stredová čiara* (čiara spájajúca ťažiská priečnych rezov telesa u ktorého jeden rozmer výrazne prevláda na ostatnými dvomi), resp. tvoriaca čiara telesa (u tekostenných rotačne symetrických škrupín). Takýto prvok môže byť jedno, dvoj, alebo trojrozmerný (1D, 2D, 3D), podľa toho, koľko a aké *stupne voľnosti* má jeho uzol. Pre prvky treba zadať prierezové charakteristiky ako plocha prierezu, kvadratické momenty tejto plochy a pod. Pomocou takýchto prvkov sa vytvárajú *výpočtové modely* prútových

a nosníkových (rámových) konštrukcií, potrubných systémov a tenkostenných rotačne symetrických škrupín.

Plošné prvky sa zase používajú pri telesách, kde jeden rozmer telesa je výrazne menší ako ostatné dva: steny, dosky, škrupiny, resp. pri rotačne symetrickom telese. Prvkami sa modeluje stredová (alebo tvoriaca) plocha telesa a zadáva sa hrúbka elementov, ktorá vo všeobecnosti môže byť pre každý element iná a môže sa meniť aj po ploche prvku.

Výpočtové modely robustných priestorových telies, kde sa uvedené zjednodušenia nedajú použiť, sa vytvarajú pomocou *objemových prvkov*. Prvky majú uzly spravidla na hranách, rohové uzly určujú základný tvar prvku, stredové umožňujú tvorbu geometricky zložitejších prvkov. Väčší počet uzlov na prvku však aj zlepšuje kvalitu prvku vzhľadom na presnosť riešenia; zároveň s počtom uzlov narastajú aj nároky na strojový čas riešenia úlohy.

Okrem týchto základných typov prvkov, existuje ešte viacero špeciálnych prvkov, ako napr. bodový prvok sústredenej hmotnosti, prvok otočného spoja, kombinovaný prvok pružina – tlmič a i.

Uvedená geometrická (tvarová) klasifikácia základných typov prvkov zostáva rovnaká aj pri iných úlohách ako sú pevnostné (napr. prenos tepla, prúdenie, akustika, elektromagnetické polia a i.) len sa mení ich fyzikálna formulácia a ich vlastnosti (parametre) vyplývajúce z tejto formulácie.

Pri praktickom použití programu MKP diskretizácii telesa predchádza tvorba jeho *geometrického modelu*. Je to v podstate interaktívne zadávanie tvaru telesa a jeho rozmerov za pomoci geometrických entít (body, čiary, plochy, objemy) a postupov známych z CAD systémov. Väčšina programov MKP obsahuje aj tzv. *predprocesor* (*preprocessor*), t. j. časť programu (skupinu príkazov) slúžiacu hlavne pre tento účel. Po rozdelení (diskretizácii) geometrického modelu telesa na konečné prvky (o čo sa opäť postará predprocesor) vznikne tzv. *výpočtový model* telesa (sieť konečných prvkov). Pravda, existujú výnimky: pri prirodzene diskrétnych konštrukciách, najmä keď ide o úlohu s malým počtom prvkov, môžeme v programe MKP vytvárať výpočtový model aj priamo, bez geometrického modelu. Vytvoria sa najprv uzlové body a tie sa potom pospájajú do prvkov. Tak sa tvoria napr. prútové konštrukcie, potrubné systémy a niekedy i iné jednoduché niekoľkoprvkové konštrukcie a telesá.

Pred delením geometrického telesa na elementy (diskretizáciou) je potrebné ešte v predprocesore zadať všetky *prierezové a materiálové charakteristiky*, ktoré sa na telese vyskytujú. Sú to napr. prierezové plochy a ich kvadratické momenty pri nosníkoch, hrúbky stien pri škrupinách; hustota, modul pružnosti, Poissonovo číslo materiálu a pod. Program tieto skupiny očísluje a vždy pred tvorbou prvkov do výpočtového modelu sa príslušné skupiny vlastností urobia aktívne aby sa „nalepili" na tvorené prvky. Tak sa jednoducho priradia napr. čiarovým prvkom prierezy, plošným prvkom hrúbky, rozdielne materiály v rôznych častiach telesa a pod. Pre objemové prvky sa prierezové charakteristiky, pochopiteľne nezadávajú.

Zadávanie zaťaženia má v MKP tiež niektoré zvláštnosti. Je užitočné vedieť, že vo výpočte sa uplatnia jedine zaťaženia, ktoré pôsobia v uzlových bodoch výpočtového modelu. Vyplýva to z toho, čo sme uviedli v úvode a v časti 1.2: MKP prevedie riešenie úlohy na systém rovnovážnych (bilančných) rovníc pre stupne voľnosti uzlových bodov a vo výpočte sa uplatnia len silové veličiny pôsobiace v uzlových bodoch výpočtového modelu. Je teda dosť prirodzené, i keď to moderné programy striktne nevyžadujú, zadávať zaťaženia až po diskretizácii telesa. Pokiaľ však výpočtový model vznikal diskretizáciou geometrického modelu skladajúceho sa vo všeobecnosti z bodov, čiar, plôch a objemov, je prirodzené, že sa tieto entity využívajú aj na zadávanie zaťaženia. Napr. plošný tlak sa zadá na plochu, kde

pôsobí, a program po spustení výpočtu ho automaticky transformuje na sily a momenty pôsobiace v uzloch elementov ležiacich na tejto ploche s ekvivalentným účinkom, ako má zadaný plošný tlak. Z tohoto princípu vyplýva, že sústredené veličiny môžeme zadávať nielen do uzlov elementov ale aj do bodov geometrického modelu, čiarové zaťaženia nielen na čiarové elementy, resp. hrany plošných a objemových prvkov, ale aj na čiary geometrického modelu a pod.

Upevnenie telesa sa v MKP realizuje tak, že sa pre uzlové body výpočtového modelu predpisujú *deformačné okrajové podmienky*. Vo všeobecnosti uzlový bod má šesť stupňov voľnosti: tri pravouhlé zložky posunutia u_x, u_y, u_z a tri pravouhlé pravotočivé zložky natočenia φ_x, φ_y, φ_z okolo súradnicových osí uzla. Súradnicový systém je pri zadávaní okrajových podmienok implicitne globálny, v prípade potreby si v uzle môžeme vytvoriť aj vhodný lokálny systém. V mieste zadania deformačnej okrajovej podmienky pôsobia po zaťažení na teleso *reakčné sily (reakcie)*, vo všeobecnosti tri silové a tri momentové pravouhlé zložky vzťahované na globálny súradnicový systém. V prípade zadania nulových hodnôt posunutí a natočení sú to reakcie tuho upevneného (votknutého) uzlového bodu. V prípade zadania nenulovej zložky program vypočíta partnerskú silovú zložku, ktorá zabezpečuje predpísané posunutie, resp. natočenie, v tomto bode telesa.

Na tomto mieste ešte raz pripomíname spôsob, ako sa v MKP pracuje s *orientovanými veličinami* (pravouhlými zložkami vektorov). Všetky takéto veličiny sa zadávajú číselne so znamienkom. Číslo predstavuje absolútnu hodnotu orientovanej veličiny a znamienko jej zmysel: znamienko plus hovorí, že veličina pôsobí v zmysle príslušnej globálnej súradnicovej osi, resp. v kladnom (pravotočivom) zmysle rotácie okolo tejto osi, znamienko mínus - proti jej zmyslu. Analogicky program vypisuje vypočítané uzlové i prvkové veličiny (posunutia a natočenia voľných uzlov, reakcie, zložky deformácie a napätia a i. - pravda, niektoré prvkové veličiny v lokálnom súradnicovom systéme prvku) po prebehnutí výpočtu.

2.3 Základné vzťahy a matice prvku

Pokiaľ máme v programe MKP vytvorený geometrický model telesa, stačí v predprocesore zadať typ elementu, materiálové vlastnosti, požadovanú hustotu delenia telesa na prvky a program nám vytvorí geometrický základ výpočtového modelu: sieť prvkov a uzlových bodov. V tomto procese sa očíslujú prvky a uzly telesa a do databázy výpočtu sa uložia súradnice všetkých uzlových bodov. Vytvoria sa tiež tzv. *prvkové čísla* – sú to čísla uzlov patriace danému prvku usporiadané v určitom poradí.

Predpokladajme teraz, že pre riešenie pevnostnej úlohy telesa na obr. 2.1 sme zvolili jednoduchý štvorstenový švoruzlový objemový prvok znázornený na obr. 2.3 (počet uzlov prvku *NUE* = 4). Pretože všetky prvky sú formálne rovnaké (líšia sa od seba len rozmermi a polohou na telese), môžeme prvok na tomto obrázku nazvať *všeobecný (ľubovoľný, e – ty) prvok* telesa. Vzťahy platné pre takýto prvok budú platiť pre všeky prvky tohoto typu na telese. Označovanie a číslovanie na takomto prvku nazývame *lokálne (prvkové)*.

Nech uzlové body prvku majú len posuvné stupne voľnosti (*NVU* = 3) a ich hodnoty usporiadajme do *vektora uzlových posunutí prvku*

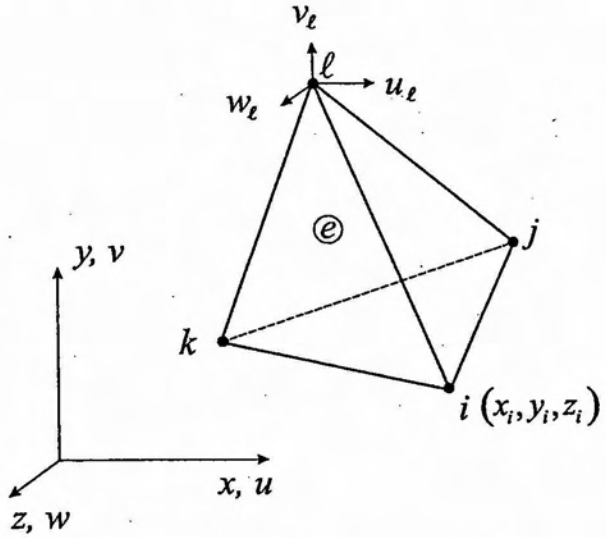
$$\mathbf{a}^e = \left[u_i, v_i, w_i, u_j, v_j, w_j, u_k, v_k, w_k, u_\ell, v_\ell, w_\ell\right]^T \qquad (2.3\text{-}1)$$

V tomto prípade každý uzol výpočtového modelu má 3 a každý prvok 12 stupňov voľnosti (*NVE* = *NVU* x *NUE* = 12). Ako sme už uviedli v časti 1.3, hodnoty zložiek posunutí uzlových bodov predstavujú v MKP primárne neznáme, ktoré nám táto metóda umožňuje

určiť. Predpokladajme, že tieto hodnoty pre *e*-ty prvok poznáme. Potom pre *približné* vyjadrenie troch zložiek posunutia všeobecného bodu (*x, y, z*) prvku možeme zvoliť štvorčlenné *aproximačné funkcie posunutí prvku* (v tvare polynómov)

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z \\ v(x,y,z) &= \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 z \\ w(x,y,z) &= \alpha_9 + \alpha_{10} x + \alpha_{11} y + \alpha_{12} z \end{aligned} \qquad (2.3\text{-}2)$$

kde 12 neznámych koeficientov budeme môcť určiť z 12 zložiek posunutí uzlových bodov (1). Maticový zápis týchto vzťahov (tomu sa pri numerických metódach, kde sa pracuje s veľkým množstvom čísiel, nedá vyhnúť) je



Obrázok 2.3 Štvorstenový štvoruzlový objemový prvok

$$\mathbf{u}(x,y,z) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{12} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\phi}(x,y,z)\boldsymbol{\alpha} \qquad (2.3\text{-}3)$$

Pre voľbu aproximačných funkcií platia určité zásady (pozri napr. [8], [7]), z ktorých jedna hovorí, že aproximačné funkcie by mali obsahovať toľko koeficientov, koľko má prvok stupňov voľnosti, čo sme v našom prípade dodržali. Táto zásada umožňuje jednoznačne vyjadriť koeficienty α_i pomocou zložiek vektora uzlových posunutí prvku (1), a to tak, že sa vzťahy (3) využijú na vyjadrenie posunutí uzlových bodov

$$\mathbf{a}^e = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ u_j \\ \vdots \\ w_\ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i & z_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_\ell & y_\ell & z_\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \vdots \\ \alpha_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_e \boldsymbol{\alpha} \qquad (2.3\text{-}4)$$

Inverziou rovníc (4) dostávame

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}_e^{-1}\mathbf{a}^e \tag{2.3- 5}$$

a dosadením výsledku do (3)

$$\mathbf{u}(x,y,z) = \boldsymbol{\phi}(x,y,z)\mathbf{A}_e^{-1}\mathbf{a}^e = \mathbf{N}^e\mathbf{a}^e \tag{2.3- 6}$$

O tomto vzťahu, pretože je pre teóriu MKP veľmi dôležitý a budeme sa s ním stretávať aj v ďalšom, si povedzme aspoň toto (podrobnejšie pozri napr. [1, 2, 7 až 12]):

Predovšetkým si treba uvedomiť, že po zvolení typu prvku a teda jeho aproximačných funkcií, členy matice

$$\mathbf{N}^e = \boldsymbol{\phi}(x,y,z)\mathbf{A}_e^{-1} \tag{2.3- 7}$$

sú *známe*, obsahuju premenné x, y, z a známe *súradnice uzlových bodov*. Vzťah (6) teda umožňuje približne určiť posunutie *všeobecného* bodu prvku pomocou posunutí uzlových bodov, a preto sa matica $\mathbf{N}^e$ niekedy nazýva aj transformačná matica posunutí. Vzhľadom na pravidelné usporiadanie núl v maticiach $\boldsymbol{\phi}$ a $\mathbf{A}_e^{-1}$ nadobúda matica $\mathbf{N}^e$ vo vzťahu (6) charakteristický tvar (pozri napr. [7])

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & N_k & 0 & 0 & N_\ell & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & N_k & 0 & 0 & N_\ell & 0 \\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & N_k & 0 & 0 & N_\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ u_j \\ \vdots \\ w_\ell \end{bmatrix} = \mathbf{N}^e\mathbf{a}^e \tag{2.3- 8}$$

kde, ako vidíme, každému uzlového bodu prvku je priradená tzv. *interpolačná, resp. tvarová funkcia (shape function)* N_i až N_ℓ, a preto sa matica $\mathbf{N}^e$ často nazýva aj *matica interpolačných (tvarových) funkcií prvku.*

Teraz už môžeme všetky dôležité funkcie (matice) prvku vyjadriť pomocou posunutí jeho uzlových bodov. Pre deformácie prvku podľa (2.1- 3) a (2.1-5) použitím (8) dostávame

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_i & \mathbf{B}_j & \mathbf{B}_k & \mathbf{B}_\ell \end{bmatrix} \mathbf{a}^e = \mathbf{B}^e\mathbf{a}^e \tag{2.3- 9}$$

kde

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \partial N_i/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial N_i/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial N_i/\partial z \\ \partial N_i/\partial y & \partial N_i/\partial x & 0 \\ 0 & \partial N_i/\partial z & \partial N_i/\partial y \\ \partial N_i/\partial z & 0 & \partial N_i/\partial x \end{bmatrix}$$

a u ostatných submatíc sa len vymení index i za príslušný index submatice. Matica $\mathbf{B}^e$ sa nazýva *transformačná matica deformácií* – umožňuje vyjadriť zložky deformácie všeobecného bodu prvku pomocou uzlových posunutí prvku.

Podľa vzťahov (2.1- 11) a (9) pre zložky napätia môžeme napísať

$$\boldsymbol{\sigma}^e = \mathbf{D}^e(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_T^e) = \mathbf{D}^e\mathbf{B}^e\mathbf{a}^e - \mathbf{D}^e\boldsymbol{\varepsilon}_T^e \tag{2.3- 10}$$

Takto už máme všetko pripravené k tomu, aby sme vyjadrili potenciálnu energiu všeobecného, e-teho prvku telesa pomocou známych matíc prvku a diskrétnych hodnôt $\mathbf{a}^e$ jeho uzlových bodov. Prvok je v rovnovážnom stave a pre jeho potenciálnu energiu platí vzťah (2.1- 14), kde dosadíme (8), (9) a (10) a po zohľadnení pravidla z maticového počtu

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T \tag{2.3- 11}$$

dostávame (predpokladáme, že na prvku nepôsobia sústredené sily – tie zahrnieme až do potenciálnej energie celého telesa, zohľadníme tiež fakt, že začiatočná deformácia $\boldsymbol{\varepsilon}_T^e$ pôsobí na prvok už na začiatku zaťažovania, a preto sa do energie napätosti musí zobrať jej plná, nie polovičná hodnota)

$$\Pi_e = \frac{1}{2}\mathbf{a}^{eT}\mathbf{K}^e\mathbf{a}^e - \mathbf{a}^{eT}\mathbf{f}^e \tag{2.3- 12}$$

kde

$$\mathbf{K}^e = \int_{V_e}\mathbf{B}^{eT}\mathbf{D}^e\mathbf{B}^e\,dV \tag{2.3- 13}$$

je štvorcová (NVE, NVE) *matica tuhosti prvku* a stĺpcová matica (NVE, 1)

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{f}_{\varepsilon_T}^e + \mathbf{f}_b^e + \mathbf{f}_S^e \tag{2.3- 14}$$

sa nazýva *vektor spojitého vonkajšieho prvkového zaťaženia.* Predstavuje zložky sústredených síl v uzloch prvku, ktoré z hľadiska energetického ekvivalentne nahradzujú účinok príslušných spojitých zaťažení prvku. Skladá sa z príspevku od začiatočnej (teplotnej) deformácie prvku

$$\mathbf{f}_{\varepsilon_T}^e = \int_{V_e}\mathbf{B}^{eT}\mathbf{D}^e\boldsymbol{\varepsilon}_T^e\,dV \tag{2.3- 15}$$

z príspevku objemových síl

$$\mathbf{f}_b^e = \int_{V_e}\mathbf{N}^{eT}\mathbf{b}\,dV \tag{2.3- 16}$$

a z príspevku od plošného zaťaženia prvku

$$\mathbf{f}_S^e = \int_{S_{1e}}\mathbf{N}^{eT}\mathbf{p}\,dV \tag{2.3- 17}$$

K odvodeným základným maticiam prvku pripojme niekoľko poznámok:

Predovšetkým treba povedať, že uvedený postup, i keď bol kvôli prehľadnosti a názornosti urobený pre konkrétny 4-uzlový štvorstenový objemový prvok, sa dá zovšeobecniť pre ľubovoľný iný prvok určený pre pevnostné problémy a odvodené vzťahy majú všeobecnú platnosť. Rovnakým postupom sa dá uloha formulovať aj pre premenlivý počet uzlov na prvku (pozri napr. [8], [7]). Odlišnosti, ktoré sa vyskytujú pri geometricky redukovaných prvkoch (plošné, čiarové), resp. prvkoch s rotačnými stupňami voľnosti, ako uvidíme neskôr,

sa skôr týkajú vzťahov medzi posunutím, pretvorením a napätím (2.1- 5) a (2.1- 7) ako definícií a postupu pri tvorbe matíc prvku.

Základom formulácie matíc prvku je vždy voľba aproximačných funkcií prvku (3) a z toho vyplývajúcich interpolačných funkcií v matici $\mathbf{N}^e$. Vzťah (8) je totiž len iná forma zápisu funkcií (3), kde koeficienty $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{12}$ sme nahradili zložkami posunutí uzlových bodov $u_i, v_i, ..., w_\ell$.

V našom prípade aproximačné funkcie posunutia prvku i jeho interpolačné funkcie sú lineárne funkcie premenných x, y, z. To ale znamená, že po vykonaní parciálnych derivácií tvarových funkcií vo vzťahu (9), bude matica $\mathbf{B}^e$ obsahovať len konštanty a zložky deformácie a teda aj napätia budú na celom prvku konštantné; tieto veličiny sa zmenia len pri prechode do susedného elementu a pri výraznejších gradientoch týchto veličín na telese by dostatočné presný výpočet vyžadoval veľmi vysokú hustotu týchto elementov vo výpočtovom modeli. Pri praktických výpočtoch sa preto v MKP používajú viacuzlové objemové prvky najčastejšie s kvadratickými tvarovými funkciami (pozri obr. 2.2).

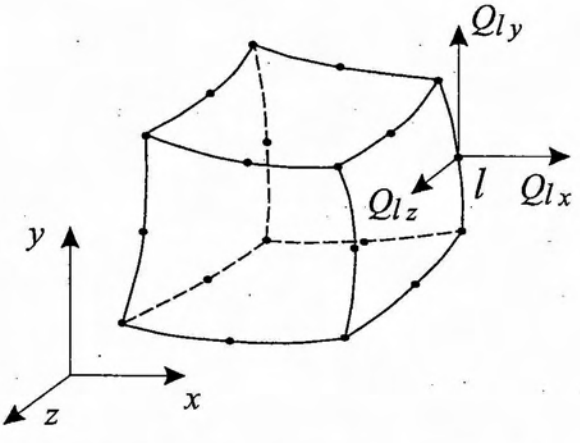
Odvodené vzťahy platia pre všetky lineárne pevnostné prvky, tvorba matíc interpolačných funkcií $\mathbf{N}^e$ sa však líši pri tzv. *izoparametrických prvkoch*, ktoré sú z algoritmického a programátorského hľadiska výhodnejšie najmä pri zložitejších úlohách a umožňujú tiež jednoducho tvoriť prvky so zakrivenými plochami a čiarami. Pre uvedené výhody už skoro úplne vytlačili klasické prvky z programov MKP. Viac si o nich povieme v ďalších častiach pri analýze matíc čiarových a rovinných prvkov.

Všimnime si tiež, že aj priamo zo vzťahu (13) vyplýva, že $\mathbf{K}^e$ je *symetrická matica*, ako sme to už uviedli pri jej definícii v časti 1.3.

2.4 Rovnice rovnováhy prvku. Vnútorné uzlové sily

Ak zo zaťaženého telesa v rovnovážnom stave tesne vedľa (nekonečne blízko) uzlov vydelíme e-ty prvok tak, že uzly zostanú mimo prvku, v bodoch susediacich s uzlami sa objaví silový účinok uzlov – tzv. *uzlové sily prvku* $\mathbf{q}^e$. Sú to vnútorné sily, ktorými uzly pôsobia na prvok a jedine cez tieto sily sa prvok zapája do silovej rovnováhy telesa. Každému stupňu voľnosti uzla odpovedá silová zložka a pre ľubovoľný uzol platí (obr. 2.4)

$$\mathbf{q}_\ell = \begin{bmatrix} Q_{\ell x} & Q_{\ell y} & Q_{\ell z} \end{bmatrix}^T \qquad (2.4\text{- }1)$$



Obrázok 2.4 Zložky prvkovej silyv ℓ-tom uzle elementu

Vektor uzlových síl prvku potom je

$$\mathbf{q}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_i \\ \mathbf{q}_j \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{NUE} \end{bmatrix} \tag{2.4- 2}$$

Celkovú potenciálnu energiu takto vydeleného prvku dostaneme, keď do vzťahu (2.3- 12) zahrnieme aj potenciálnu energiu uzlových síl

$$\bar{\Pi}_e = \frac{1}{2}\mathbf{a}^{eT}\mathbf{K}^e\mathbf{a}^e - \mathbf{a}^{eT}\mathbf{f}^e - \mathbf{a}^{eT}\mathbf{q}^e \tag{2.4- 3}$$

Keďže takto vydelený prvok predstavuje teleso v rovnováhe, môžeme naň aplikovať princíp minima celkovej potenciálnej energie a minimalizovať jej hodnotu vzhľadom na posunutie uzlových bodov

$$\frac{\partial \bar{\Pi}_e}{\partial \mathbf{a}^e} = \mathbf{K}^e\mathbf{a}^e - \mathbf{f}^e - \mathbf{q}^e = \mathbf{0} \tag{2.4- 4}$$

z čoho pre uzlové sily prvku dostávame výsledný vzťah

$$\mathbf{q}^e = \mathbf{K}^e\mathbf{a}^e - \mathbf{f}^e \tag{2.4- 5}$$

V prípade, že prvok nie je zaťažený vonkajšími *spojitými* silami ($\mathbf{f}^e = \mathbf{0}$), platí

$$\mathbf{q}^e = \mathbf{K}^e\mathbf{a}^e \tag{2.4- 6}$$

Z tejto rovnice vyplýva už uvedený fyzikálny zmysel matice tuhosti prvku: Je to matica, ktorá udáva vzťah (závislosť) medzi uzlovými silami a uzlovými posunutiami prvku. Pri jednoduchých prvkoch je teda možné nájsť túto závislosť aj priamo, bez vyjadrovania potenciálnej energie (pozri príklad 1.1). Podrobnejšiu teóriu k rovniciam rovnováhy prvku i MKP možno nájsť napr. v [13].

2.5 Matice telesa a výsledná sústava rovníc

Budeme predpokladať, že výpočtový model telesa sa skladá z *NET* prvkov a po globálnom očíslovaní uzlov je ich celkový počet *NUT*. Nech každý uzlový bod má rovnaký počet stupňov voľnosti *NVU*; potom celkový počet stupňov voľnosti telesa je *NVT* = *NVU* x *NUT*.

Potenciálnu energiu celého telesa vypočítame ako súčet energií jednotlivých prvkov podľa (2.3- 12), kde namiesto prvkového vektora $\mathbf{a}^e$ zavedieme *(globálny) vektor uzlových posunutí telesa*

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & u_2 & \cdots & u_{NUT} & v_{NUT} & w_{NUT} \end{bmatrix}^T \tag{2.5- 1}$$

Do nej teraz zahrnieme aj potenciálnu energiu vonkajších sústredených síl usporiadaných do vektora

$$\mathbf{f}_F = \begin{bmatrix} F_{x1} & F_{y1} & F_{z1} & F_{x2} & \cdots & F_{xNUT} & F_{yNUT} & F_{zNUT} \end{bmatrix}^T \tag{2.5- 2}$$

o ktorých, ako vidieť, predpokladáme, že pôsobia v uzlových bodoch telesa. Aby súčiny matíc v (2.3- 12) boli definované, musíme prvkové matice doplniť o príslušný počet nulových riadkov a stĺpcov a zmeniť ich takto na tzv. *rozšírené matice* $\underline{\mathbf{K}}^e$, $\underline{\mathbf{f}}^e$ (pozri časť 1.3). *Celkovú potenciálnu energiu telesa* potom môžeme vyjadriť v tvare

$$\Pi = \sum_{e=1}^{NET} \Pi_e + \Pi_F = \sum_{e=1}^{NET} \left(\frac{1}{2} \mathbf{a}^T \underline{\mathbf{K}}^e \mathbf{a} - \mathbf{a}^T \underline{\mathbf{f}}^e \right) - \mathbf{a}^T \mathbf{f}_F \qquad (2.5\text{- }3)$$

alebo

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \left(\sum_{e=1}^{NET} \underline{\mathbf{K}}^e \right) \mathbf{a} - \mathbf{a}^T \left(\sum_{e=1}^{NET} \underline{\mathbf{f}}^e + \mathbf{f}_F \right)$$

a v najjednoduchšom zápise

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{K} \mathbf{a} - \mathbf{a}^T \mathbf{f} \qquad (2.5\text{- }4)$$

Zaviedli sme symetrickú *maticu tuhosti telesa* (konštrukcie) ako súčet rozšírených matíc tuhosti prvkov

$$\underset{[NVT,NVT]}{\mathbf{K}} = \sum_{e=1}^{NET} \underline{\mathbf{K}}^e \qquad (2.5\text{- }5)$$

a *výsledný vektor zaťaženia telesa* skladajúci sa z príspevku spojitých zaťažení prvkov a sústredených síl zadaných priamo do uzlov

$$\underset{[NVT,1]}{\mathbf{f}} = \sum_{e=1}^{NET} \underline{\mathbf{f}}^e + \mathbf{f}_F = \mathbf{f}_E + \mathbf{f}_F \qquad (2.5\text{- }6)$$

Dosiahol sa cieľ diskretizácie úlohy – potenciálnu energiu telesa sme v (4) vyjadrili pomocou známych matíc $\mathbf{K}$ a $\mathbf{f}$ a pomocou číselných hodnôt posunutí uzlových bodov telesa obsiahnutých vo vektore $\mathbf{a}$ (1). Podmienky minimalizujúce Π vzhľadom na tieto posunutia sú (dostávame toľko rovníc, koľko je neznámych):

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_1} = \frac{\partial \Pi}{\partial v_1} = \frac{\partial \Pi}{\partial w_1} = \frac{\partial \Pi}{\partial u_2} = \cdots \frac{\partial \Pi}{\partial w_{NUT}} = 0 \qquad (2.5\text{- }7)$$

Aplikácia (7) na vzťah (4) dáva*

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{a}} = \mathbf{K}\mathbf{a} - \mathbf{f} = \mathbf{0} \qquad (2.5\text{- }8)$$

a dostávame *výslednú sústavu rovníc*

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f} \qquad (2.5\text{- }9)$$

pre určenie primárnych neznámych úlohy – zložiek posunutí uzlových bodov telesa.

---

* V maticovom počte platí

$$\frac{\partial \left(\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \right)}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{A}\mathbf{x}\,, \qquad \frac{\partial \left(\mathbf{x}^T \mathbf{b} \right)}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{b}$$

Sústava rovníc (9) platí pre neupevnené teleso a matica $\mathbf{K}$ je singulárna. Aby sme dostali rovnice vhodné pre výpočet zložiek posunutí uzlových bodov, musíme zaviesť okrajové podmienky, ktorých musí byť minimálne toľko, aby odstránili možné pohyby telesa ako tuhého celku. Pokiaľ túto podmienku pri výpočte nedodržíme, program zahlási určitým spôsobom singularitu matice tuhosti telesa a výpočet sa zastaví. Program vlastne v takomto prípade pri riešení sústavy narazí na delenie nulou; pretože však moderné počítače pracujú s vysokou presnosťou reálneho čísla a strojová nula môže byť aj veľmi malé číslo, stáva sa aj to, že výpočet pokračuje ďalej a vypočítame nereálne „kilometrové" posunutia.

Ak po zavedení okrajových podmienok prepíšeme (9) do tvaru

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ab} \\ \mathbf{K}_{ba} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_a \\ \mathbf{a}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_a \\ \mathbf{f}_b \end{bmatrix} \tag{2.5- 10}$$

kde $\mathbf{a}_a$ sú neznáme a $\mathbf{a}_b$ známe (zadané) zložky posunutí uzlových bodov, potom z rovníc

$$\mathbf{K}_{aa}\mathbf{a}_a = \mathbf{f}_a - \mathbf{K}_{ab}\mathbf{a}_b \tag{2.5- 11}$$

program vypočíta posunutia voľných uzlových bodov $\mathbf{a}_a$ a v miestach predpísaných okrajových podmienok reakcie z rovníc

$$\mathbf{f}_b = \mathbf{K}_{ba}\mathbf{a}_a + \mathbf{K}_{bb}\mathbf{a}_b \tag{2.5- 12}$$

Úloha sa zjednoduší, ak zadávame len nulové zložky posunutí uzlových bodov (tuhé upevnenie bodu v príslušnom smere), kedy $\mathbf{a}_b = \mathbf{0}$. Potom podľa (11) platí

$$\mathbf{K}_{aa}\mathbf{a}_a = \mathbf{f}_a$$

čo môžeme zapísať v tvare

$$\tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{a}} = \tilde{\mathbf{f}} \tag{2.5- 13}$$

Po vyčíslení primárnych neznámych program v cykle cez všetky prvky zo vzťahov (2.3- 9) a (2.3- 10) vypočíta deformácie a napätia v prvkoch a z nich odvodené veličiny (napr. hlavné pomerné deformácie, intenzitu napätia a pod.). Program ešte obsahuje skupinu príkazov tzv. *postprocesora*, ktoré slúžia na spracovanie výsledkov (číselné výpisy, grafické znázorňovanie výsledkov buď na modeli alebo v grafoch, číselné operácie s výsledkami a i.).

Je zrejmé, že vo všeobecnosti funkcie (2.3- 8) len približne vystihujú posunutia bodov telesa. Použitie týchto funkcií pri výpočte potenciálnej energie telesa spôsobí, že vypočítame len približné funkcie deformácií (2.3- 9) a z nich len približné hodnoty napätí podľa (2.3- 10). Výnimkou sú však prútové a nosníkové konštrukcie, pri ktorých možno z posunutí uzlových bodov exaktne (v rámci teórie nosníka) vyjadriť posunutie všeobecného bodu prvku. Pre spojité všeobecné telesá stupeň presnosti výpočtu pomocou MKP závisí od použitého prvku a hustoty delenia telesa na prvky. Moderné programy MKP umožňujú pri lineárnych úlohách určiť presnosť riešenia, resp. riešiť úlohu tak, aby bola dodržaná stanovená presnosť výsledkov (pozri časť 2.6.3.5).

Zostavenie matíc telesa z matíc prvkov. Vektor kódových čísiel

Spočítavanie potenciálnej energie prvkov a minimalizovanie výslednej energie telesa sa pri algoritmickom (programovom) spracovaní v MKP nahradzuje priamym zostavovaním výslednej matice telesa $\mathbf{K}$ a vektora zaťažení telesa $\mathbf{f}$ pomocou takzvaných *vektorov kódových čísiel prvku* založených na princípe spočítavania rozšírených matíc prvkov $\bar{\mathbf{K}}^e$

a $\overline{\mathbf{f}}^e$, ktorý sme uviedli pri vysvetľovaní základných princípov metódy v časti 1.3. Tento postup teraz už môžeme vysvetliť podrobnejšie:

Maticové vyjadrenie potenciálnej energie prvku je (2.3- 12)

$$\Pi_e = \frac{1}{2}\mathbf{a}^{eT}\mathbf{K}^e\mathbf{a}^e - \mathbf{a}^{eT}\mathbf{f}^e$$

V prípade jednorozmerného prútového prvku s lokálnymi číslami uzlov i a j (obr. 1.4) môžeme tento vzťah názorne rozpísať

$$\Pi_e = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} u_i^e & u_j^e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} K_{ii}^e & K_{ij}^e \\ K_{ji}^e & K_{jj}^e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_i^e \\ u_j^e \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_i^e & u_j^e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_i^e \\ f_j^e \end{bmatrix} \qquad (2.5\text{- }14)$$

Pre konkrétny prvok jednorozmerného telesa s *globálnymi* číslami uzlov d a m, ktoré tvoria tzv. *prvkové číslo*, bude jeho potenciálna energia

$$\Pi_e = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} u_d & u_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} K_{ii}^e & K_{ij}^e \\ K_{ji}^e & K_{jj}^e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_d \\ u_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_d & u_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_d \\ f_m \end{bmatrix} \qquad (2.5\text{- }15)$$

Ak do vzťahu (15) namiesto vektora posunutí prvku

$$\begin{bmatrix} u_d & u_m \end{bmatrix}^T$$

dosadíme globálny vektor posunutí telesa

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_d & \cdots & u_m & \cdots & u_{NVT} \end{bmatrix}^T \qquad (2.5\text{- }16)$$

sumácia energií prvkov sa môže robiť priamo podľa (3) (pozri tiež odstavec 1.3), maticu tuhosti prvku a vektor spojitých zaťažení prvku však musíme rozšíriť o nulové členy tak, aby ich súčiny s vektorom $\mathbf{a}$ boli definované. Maticový zápis potenciálnej energie prvku (2.3-12) sa zmení na

$$\Pi_e = \frac{1}{2}\mathbf{a}^T\underline{\mathbf{K}}^e\mathbf{a} - \mathbf{a}^T\underline{\mathbf{f}}^e \qquad (2.5\text{- }17)$$

kde rozšírené matice prvku sú

$$\underline{\mathbf{K}}^e = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & \cdots & d & \cdots & m & \cdots & NVT \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} & & & \vdots & & \vdots & & \\ & & & \vdots & & \vdots & & \\ & & & \vdots & & \vdots & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & K_{ii}^e & \cdots & K_{ij}^e & \cdots & \cdots \\ & & & \vdots & & \vdots & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & K_{ji}^e & \cdots & K_{jj}^e & \cdots & \cdots \\ & & & \vdots & & \vdots & & \\ & & & \vdots & & \vdots & & \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ d \\ \vdots \\ m \\ \vdots \\ NVT \end{matrix} \qquad \underline{\mathbf{f}}^e = \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f_i^e \\ \vdots \\ f_j^e \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ d \\ \vdots \\ m \\ \vdots \\ NVT \end{matrix} \qquad (2.5\text{- }18)$$

a v ktorých všetky nevypísané členy sa rovnajú nule.

Výsledné matice telesa možno teda tvoriť ako súčet rozšírených matíc všetkých prvkov telesa podľa vzťahov (5) a (6). Pri algoritmickej a programátorskej tvorbe rozšírených matíc sa obyčajne využíva tzv. vektor *kódových čísiel prvku.* Je to vektor, do ktorého v poradí prvkového čísla usporiadame globálne čísla zložiek posunutí uzlov prvku. V uvedenom príklade jednorozmerného prútového prvku to bude vektor

$$\mathbf{k}^e = \begin{bmatrix} d \\ m \end{bmatrix} \tag{2.5- 19}$$

Analogicky sa tvorí aj v prípade zložitejších prvkov. Napr. pri priestorovom prútovom prvku, kedy každý uzol má tri stupne voľnosti, prvok s globálnymi číslami uzlov d a m bude mať vektor kódových čísiel

$$\mathbf{k}^e = \begin{bmatrix} 3d-2 & 3d-1 & 3d & 3m-2 & 3m-1 & 3m \end{bmatrix}^T \tag{2.5- 20}$$

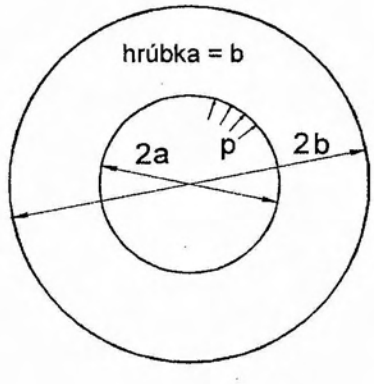
Z (18) vyplýva, že *r*-tý a *s*-tý člen vektora kódových čísiel prvku udáva adresu člena rozšírenej matice prvku, na ktorú treba umiestniť K_{rs}-tý člen matice prvku a *r*-tý člen vektora kódových čísiel udáva adresu rozšíreného vektora prvkového zaťaženia, na ktorú treba umiestniť *r*-tý člen vektora prvkového zaťaženia.

Uvedené definície nám umožňujú zostavovať rozšírené matice prvkov a z nich priamo vypočítať výsledné matice telesa **K** a $\mathbf{f}_E$. V skutočnosti, a hlavne vo výpočtových programoch, by bolo nevýhodné zostavovať rozšírené matice prvkov a potom ich spočítavať. Postupuje sa tak, že sa vytvorí priestor len pre výslednú maticu, do ktorej sa v cykle cez všetky prvky adíciou (algebrickým pripočítaním) ukladajú jednotlivé členy nerozšírených matíc prvkov pomocou kódových čísiel.

Pretože, ako vidieť, sa pri tvorbe rozšírených matíc symetria členov matice prvku zachováva, je aj matica tuhosti telesa **K** symetrická matica. Z uvedeného postupu jej tvorby tiež vyplýva, že pri väčšej úlohe bude mať výrazne pásový charakter, čo sa využíva jednak pri jej ukladaní do pamäti i pri vlastnom riešení výslednej sústavy rovníc.

Príklad 2.1

Pre hrubostenný prstenec zaťažený nalisovacím tlakom p = 100 MPa, s vnútorným polomerom a = 0,1 m, vonkajším polomerom b = 0.2 m a s hrúbkou 0,2 m vypočítajte maximálne hodnoty radiálneho a tangenciálneho napätia a porovnajte ich s exaktnými hodnotami analytického riešenia ($\sigma_{r\,max}$ = -100 MPa, $\sigma_{r\,min}$ = 0, $\sigma_{\vartheta\,max}$ = 166,6$\overline{6}$ MPa, $\sigma_{\vartheta\,min}$ = 66,6$\overline{6}$ MPa). Na riešenie použite 20-uzlový prvok priestorového telesa *Solid 95*.



1. Zadanie názvu úlohy
Utility Menu>Change Jobname... /FILNAM = PRSTENEC, OK;

2. Otvorenie predprocesora
P: Preprocessor

3. Zadanie typu prvku pre úlohu
Preprocessor>Element Type>Add/Edit/Delete, Add... Structural Solid Brick 20 node 95, OK, Close;

4. Zadanie materiálovej skupiny
Preprocessor>Material Props>Material Models... (Material Model Number 1), Structural, Linear, Elastic, Isotropic, EX = 2.1E11, PRXY = 0.3, OK, Material, Exit;

5. Vytvorenie symetrickej štvrtiny telesa
Preprocessor>Modeling>Create>Volumes>Cylinder>By Dimensions... RAD1 = 0.2
RAD2 = 0.1,
Z1 = 0.1, Z2 = 0,
THETA1 = 180,
THETA2 = 270, OK;

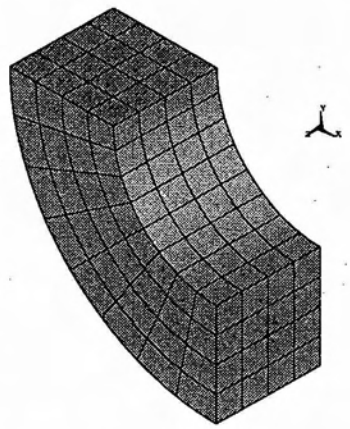
6. Axonometrický pohľad na teleso
Utility Menu>Plot Ctrls>Pan, Zoom, Rotate... Iso;

7. Zadanie priemernej dĺžky hrany prvku
Preprocessor>Meshing>Size Cntrls>Manual Size>Global>Size... SIZE = 0.025, NDIV = 0, OK;

8. Vykreslenie čiar telesa
Utility Menu>Plot>Lines;

9. Zadanie počtu prvkov na niektorých čiarach
Preprocessor>Meshing>Size Cntrls>ManualSize>Lines>Picked Lines↑ Kliknite (vysvieťte) postupne na všetky štyri oblúkové čiary telesa zhruba v ich strede (pokiaľ sa vysvieti nesprávna čiara, otočte pravým tlačidlom myši šipku a kliknutím ju zrušte; šípka sa vracia do pôvodnej polohy tiež pravým tlačidlom myši), OK... SIZE = 0, NDIV = 8, OK;

10. Vytvorenie siete prvkov a uzlov
Preprocessor>Meshing>Mesh>Volumes>Mapped>4 to 6 sided↑... Pick All;



11. Zadanie symetrických okrajových podmienok na telese
Main Menu > Solution> Define Loads>Apply> Structural>Displacement> Symmetry B.C. >On Areas↑ Kliknite na dve štvorcové plochy a čelnú rovinnú plochu telesa zhruba v strede, OK;

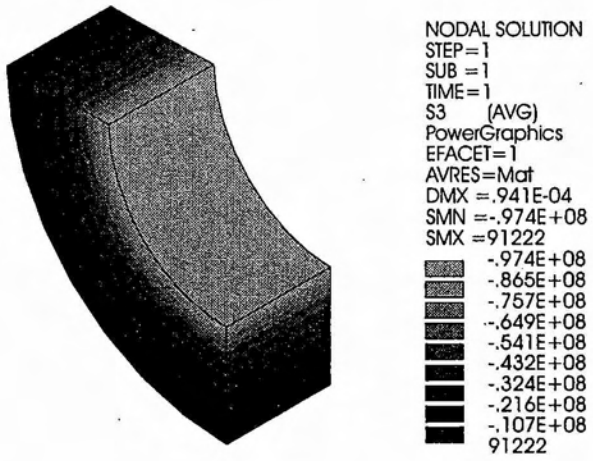
12. Zadanie plošného tlaku
Solution>Define Loads>Apply>Structural>Pressure>On Areas↑ Kliknite na vnútornú zakrivenú plochu telesa zhruba v strede, OK, VALUE = 100E6, OK;

13. Kontrola správneho účinku tlaku
Utility Menu>PlotCtrls>Symbols... Zmeňte pod *Pressures: Face outlines* na *Arrows*, OK;

14. Symbol tlaku je viditeľný len na plochách (zadali sme ho na plochu)
Utility Menu>Plot>Areas; (Šípka tlaku musí smerovať do plochy)

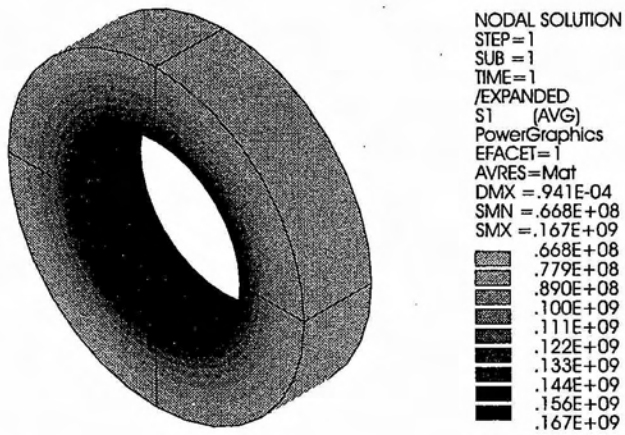
15. Výpočet úlohy
Solution> Solve> Current LS... Prečítajte si informácie o úlohe v bielom okne a zavrite ho. Kliknite na OK v zelenom (šedom) okne. Ak ste neurobili chybu v postupe, prebehne výpočet a objaví sa žlté okno s informáciou *Solution is done!*

16. Znázornenie priebehu *radiálneho* napätia na telese
Main Menu>General Postproc>Plot Results>Contour Plot>Nodal Solu... Stress, 3rd Principal S3, OK;



17. Znázornenie priebehu *tangenciálneho* napätia na telese
Main Menu>General Postproc>Plot Results> Contour Plot> Nodal Solu... Stress 1st Principal S1, OK;

18. Doplnenie symetrických častí
Utility Menu>Plot Ctrls>Style>Symmetry Expansion>Periodic/Cyclic Symmetry... ¼ Dihedral Sym, OK;



19. Uloženie databázy úlohy
Ansys Toolbar>Save_DB;

Poznámky k príkladu 2.1

1. Voľba typu prvku a hustoty prvkov na telese

Pri pevnostnej analýze prstenca sme použili priestorový prvok *SOLID 95*. Je to 20-uzlový šesťsten (*hexahedron*, obr. 2.2 c), ktorý, ako vidieť z výsledkov, umožňuje aj pri pomerne riedkom delení telesa na prvky, dostatočne presné riešenie úlohy. Presnosť vyplýva jednak z väčšieho počtu uzlov na elemente a tým aj vyššieho (kvadratického) stupňa aproximačných polynómov v (2.3- 2), ale tiež aj z prítomnosti stredových uzlov na hranách prvku, čo umožňuje dostatočne presne aproximovať zakrivené hrany telesa. Pri zložitejších tvaroch telesa ho možno kombinovať s 10-uzlovým štvorstenom (*tetrahedron*, obr. 2.2 c), program pritom vytvorí prechodové prvky umožňujúce spojiť ich rozdielne steny. Samostatne sa štvorsten používa len v prípade nutnosti, t. j. vtedy, keď program odmietne daný objem deliť parametricky (*mapped*) na šesťsteny. Vtedy musíme štvorsten (*Solid 92)* príkazom č.3 definovať a v príkaze č. 10 zvoliť voľné (*free*) delenie. V našom príklade by použitie tohoto prvku pri zhruba rovnakej presnosti riešenia viedlo k zbytočnému nárastu strojového času a veľkosti databázy (pri rovnakých rozmerových a hustotných požiadavkach na prvky by sa počet prvkov úlohy zvýšil zo 128 na 739 a uzlov zo 785 na 1398).

Pre zujímavosť uveďme, ako by sa pri riešení úlohy prejavilo použitie *8-uzlového* šesťstena (*Solid 45*, obr. 2.2 c) pri rovnakej hustote delenia telesa: Pochopiteľne databáza úlohy by bola najmenšia (najmenšie nároky na obsadenie diskovej pamäti) – počet prvkov by bol 128, ale počet uzlov by sa znížil na 225. To by viedlo na najnižší strojový čas, pretože počet rovníc, ktoré musí počítač riešiť závisí od počtu voľných uzlov. Tento dôsledok je významný a potrebný pri veľkých a najmä dynamických, resp. nelineárnych úlohách i v prípade výkonných počítačov, pretože akonáhle sa sústava rovníc nezmestí do operačnej pamäti, program prechádza na riešenie s prepisovaním jej blokov do diskovej pamäti a riešenie sa veľmi výrazne spomalí. Pravda, presnosť riešenia sa zníži. V našom príklade riešenie s týmto prvkom dáva $\sigma_{r\,max}$ = -72,6 MPa, $\sigma_{r\,min}$ = - 3,84 MPa, $\sigma_{\vartheta\,max}$ = 174 MPa, $\sigma_{\vartheta\,min}$ = 63,3 MPa.

Na tomto príklade sme si ukázali použitie priestorových telesových prvkov. Aby sme geometriu telesa vytvorili čo najjednoduchšie, zvolili sme rotačne symetrické teleso. Pravda, pre úplnosť treba povedať, že použitie všeobecných priestorových prvkov pre riešenie rotačne symetrického telesa je neefektívne aj v prípade využitia symetrie. Takéto úlohy treba riešiť pomocou dvojrozmerných rotačne symetrických prvkov (pozri príklad 2.7).

2. Delenie telesa na prvky (meshing), upevňovanie a zaťažovanie telesa

V predchádzajúcej poznámke sme uviedli, ako vplýva voľba typu elementu na presnosť riešenia a rozsah úlohy. Pripomíname v tejto súvislosti ešte raz, že pokiaľ chceme mať pri najmenšej databáze úlohy najväčšiu presnosť riešenia, treba pre objemy voliť šesťstenové (nie štvorstenové) prvky a analogicky pri rovinných úlohách pre plochy voliť štvoruholníkové (nie trojuholníkové) prvky. S takýmito prvkami potom pri tvorbe výpočtového modelu (*meshing*u) treba požadovať parametrické, nami predpísané (*mapped*) delenie telesa, plochy, resp. oblasti. Takéto delenie program však urobí len pre objemy so 4 až 6 stenami resp. pri rovinných úlohách pre plochy s 3 alebo 4 obrysovými čiarami. Často sa potom objemy, resp. plochy pred delením na prvky upravujú na takéto časti pomocou príkazov *concatenate,* ktoré zviažu (fiktívne – len pre potreby *meshing*u) potrebný počet plôch, resp. čiar tak, aby uvedené podmienky parametrického delenia boli splnené. Tieto príkazy nájdeme postupnosťou *Preprocessor>Meshing>Mesh>Volumes>Mapped* resp. *Preprocessor>Meshing>Mesh>Areas>Mapped* a je užitočné ich využívať pri tvorbe efektívnych výpočtových modelov.

V teoretickej časti sme uviedli, že všetky okrajové podmienky (vrátane zaťažení) sa predpisujú pre uzlové body, pretože len tak sa dostanú do výslednej sústavy rovníc úlohy. Je to naozaj tak, program nám však umožňuje zadávať tieto vstupné hodnoty aj na geometrické entity, z ktorých ich potom po spustení výpočtu prenesie do uzlových bodov. Je to samozrejme veľmi výhodné, pretože ak máme na nejakej ploche 100 uzlov a chceme do nich zadať rovnakú okrajovú podmienku, nemusíme ju zadávať pre každý uzol, ale zadáme ju pre danú plochu (pozri príkazy č. 11 a 12). Je to výhodné aj z toho dôvodu, že pri praktických úlohách často meníme hustotu prvkov a teda aj hustotu uzlov pri tvorbe optimálneho výpočtového modelu. Robí sa to tak, že najprv príkazom *Preprocessor>Meshing>Clear>Volumes*↑... *Pick All* vymažeme starú sieť prvkov, potom zmeníme požadovanú hustotu príkazmi *Size Controls>* a vytvoríme novú sieť. Pritom všetky okrajové podmienky, pokiaľ sme ich zadali na geometrické entity, zostávajú zachované (podmienky zadané na uzloch a prvkoch by sa vymazali a museli by sme ich opätovne zadať).

3. Analýza výsledkov (postprocessing)

Pokiaľ sa nám podarilo podľa uvedeného postupu doviesť úlohu *Prstenec* do úspešného konca a uložili sme ju na disk, môžeme s ňou ľubovoľne experimentovať, pretože príkazom *Ansys Toolbar>Resume_DB;* sa môžeme k pôvodnému stavu hocikedy vrátiť. Tieto experimenty by mali viesť jednak k overeniu si postupov uvedených v predchádzajúcich poznámkach k tejto úlohe a tiež k zoznámeniu sa s možnosťami, ktoré program poskytuje pri analýze výsledkov. Tie sú tak široké, že sa im nemôžeme venovať podrobne, najdôležitejšie sa už objavili, resp. sa postupne objavia v ďalších príkladoch. Vo všeobecnom postprocesore ich nájdeme v skupinách príkazov: *Plot Results>; List Results>; Query Results>; Element Table>; Path Operations>* a i.

2.6 Redukované pevnostné úlohy

V technickej praxi všetky konštrukčné časti predstavujú trojrozmerné telesá. Po zaťažení takéhoto telesa treba pri pevnostnej úlohe, ako sme si to ukázali v časti 2.2, nájsť v jeho všeobecnom bode tri zložky posunutia u,v,w a šesť zložiek deformácie i napätia. I keď by sme v podstate každú konštrukčnú časť mohli riešiť takto, bolo by to vo väčšine prípadov riešenie veľmi neefektívne a v niektorých prípadoch aj nemožné (napr. veľký potrubný systém). Z teórie pružnosti a pevnosti vieme, že pri mnohých konštrukčných častiach sa dá pevnostná (statická i dynamická) úloha výrazne zjednodušiť.

Redukcia počtu neznámych a prechod z priestorového problému na rovinný resp. jednoosový problém sa využíva aj v MKP. Konštrukcie a ich časti, s ktorými sa v praxi stretávame, sa z tohoto hľadiska dajú rozdeliť na:

1. nosníkové konštrukcie
   a) prútové sústavy
   b) rámy
   c) potrubné systémy
2. telesá namáhané rovinnou napätosťou
3. telesá namáhané rovinnou deformáciou
4. rotačne symetrické telesá
5. rotačne symetrické telesá s nesymetrickým zaťažením
6. tenké rotačne symetrické škrupiny
7. tenké rotačne symetrické škrupiny s nesymetrickým zaťažením
8. tenké škrupiny
9. hrubé škrupiny
10. všeobecné priestorové telesá

Pretože telesá 1 až 9, ako aj ich kombinácie, sa dajú jednoduchšie riešiť ako vo forme všeobecného priestorového telesa, vývojom MKP sa vytvorili špeciálne prvky, ktoré umožňujú ich efektívnu pevnostnú analýzu. V tejto práci nie je možné zaoberať sa redukovanými pevnostnými úlohami v celej šírke a vo všetkých podrobnostiach. Možno však povedať, že postup tvorby matíc a výslednej sústavy rovníc úlohy i pri redukovaných modeloch zostáva v podstate rovnaký, ako v prípade všeobecného priestorového telesa, len sa tu objavujú niektoré rozdiely (napr. tvorba matíc prvku v *lokálnom súradnicovom systéme prvku*), na ktoré predovšetkým poukážeme pri ich opise.

Nosníkové konštrukcie patria do kategórie *diskrétnych sústav*, ich delenie na konečné prvky a voľba uzlových bodov sú v podstate dané vlastnou konštrukciou. Skladajú sa z *nosníkov*, t. j. telies u ktorých dĺžka výrazne prevláda nad rozmermi priečneho prierezu. Z konštrukcie sa modelujú len stredové čiary nosníkov a na nich sa vyznačujú uzlové body. Uzlové body volíme v miestach, kde sa rozvetvujú alebo lámu stredové čiary, v miestach upevnení a v bodoch, kde pôsobia sústredené zaťaženia (sily, momenty), alebo kde sa náhle mení veľkosť spojitého zaťaženia. Uzly treba zvoliť aj tam, kde sa náhle mení prierez alebo materiál nosníka. Pri rámoch a potrubných sústavách často k týmto „povinným“ uzlom pridávame na nosníkoch za pomoci programu množstvo ďalších, aby sme dostali názorný grafický priebeh vypočítaných veličín po nosníkoch.

Klasickým prípadom nosníkových konštrukcií sú tzv. *rámy*, pri ktorých sú nosníky vo všeobecnosti namáhané kombináciou ťahu/tlaku, ohybu, šmyku a krútenia. *Prútové sústavy* a *potrubné systémy* sú špeciálne prípady nosníkových konštrukcií: nosníky prútovej sústavy sú namáhané len osovými silami na ťah, resp. tlak; nosníky potrubného systému majú

medzikruhový prierez (sú to rúry) a ku všeobecnému nosníkovému zaťaženiu tu pristupuje aj zaťaženie od plošného tlaku a tiaže média v rúrach.

Pri riešení úloh pre ostatné redukované telesá modelujeme len *stredovú plochu*, pri rotačne symetrických úlohách *tvoriacu plochu* (t. j. plochu, ktorej rotáciou okolo určenej osi vznikne teleso), resp. *tvoriacu čiaru* telesa. Tvorbu konečných prvkov pri zvolenej hustote zverujeme programu. Entity geometrického modelu (body, čiary, plochy a pri všeobecnom telese aj objemy) tvoríme však tak, aby sme mali k dispozícii plochy pre plošný tlak, aby sme mali rozdelené časti modelu v miestach geometrických a silových nespojitostí, vytvorené uzly v miestach sústredených síl atď.

V nasledujúcich odsekoch si na vybraných pevnostných úlohách objasníme tvorbu matíc prvkov a niektoré základné postupy pri numerickom riešení takýchto úloh.

2.6.1 Prútové sústavy

Prútovými konštrukciami nazývame tak zaťažené a usporiadané nosníkové konštrukcie, že v nich vznikajú zanedbateľne malé ohybové a krútiace momenty a priečne sily. V takomto prípade sa konštrukcia chová tak, akoby nosníky boli prepojené priestorovými kĺbmi. Nosníky – prúty (*trusses, spars, links*) potom prenášajú len osovú silu, vzniká v nich len ťahové, resp. tlakové napätie a konštrukciu možno analyzovať pomocou jednoduchých prútových konečných prvkov. Na takúto nosníkovú konštrukciu nesmú pôsobiť sústredené vonkajšie momenty, sústredené sily musia pôsobiť v styčníkoch a nosníky mimo väzieb musia tvoriť trojuholníky.

Prútový prvok je teda len špeciálny prípad nosníkového prvku a veľmi dobre sa hodí (vzhľadom na jeho jednoduchosť) na vysvetlenie transformácie matíc medzi *lokálnym súradnicovým systémom prvku* a *globálnym súradnicovým systémom* výpočtového modelu. Pri rovinných a priestorových *čiarových* prvkoch sa totiž tvoria matice prvku najčastejšie v jeho lokálnom súradnicovom systéme a potom sa transformujú do globálneho systému. Tento postup je jednoduchší ako ich klasická tvorba v globálnom systéme podľa vzťahu (2.3- 13). Skôr, ako prejdeme k uvedeným transformačným vzťahom, sa však budeme podrobnejšie zaoberať súradnicovými systémami čiarového prvku.

2.6.1.1 Výpočet matíc prútového prvku v globálnom súradnicovom systéme

Odvodené vzťahy pre výpočet základných matíc prvku v časti 2.3 platia všeobecne pre ľubovoľný pevnostný prvok, a teda aj pre jednorozmerný prútový prvok. Pretože s týmto prvkom už máme určité skúsenosti, výsledky sú názorné a dajú sa ľahko vyčísliť a overiť, priblížme si najprv odvodené vzťahy (2.3-13) až (2.3-17) výpočtom niektorých matíc tohoto prvku. Využitie odvodených vzťahov je rovnaké aj pri zložitejších plošných a objemových prvkoch, len vyčíslovanie integrálov v týchto vzťahoch je obtiažnejšie.

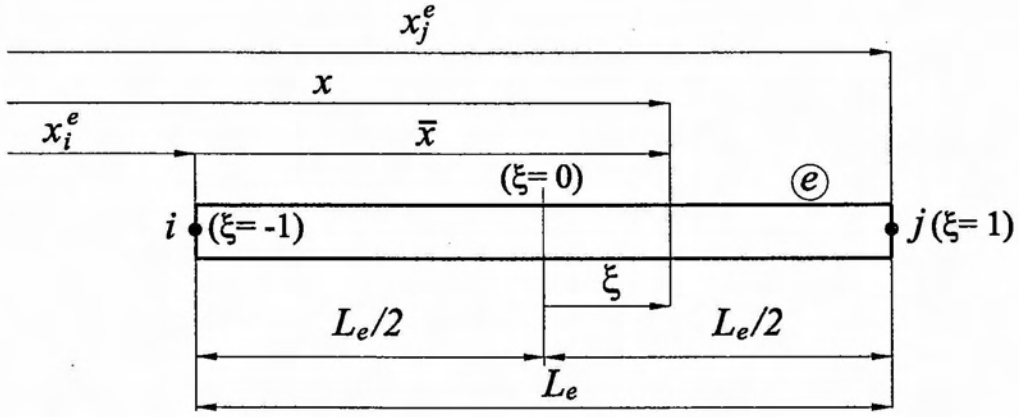
Pre jednorozmerný prvok určíme najprv v globálnom súradnicovom systéme s premennou x (obr. 2.5) maticu tuhosti, vektor prvkového zaťaženia od vlastnej tiaže v smere osi prúta a vektor prvkového zaťaženia od začiatočnej teplotnej deformácie, keď je dané E_e, S_e, $L_e = x_j - x_i$, $\varepsilon_T^e = \alpha_e \Delta T_e$ a hustota materiálu ρ_e.

Po zaťažení konštrukcie, ktorej súčasťou je takýto prvok, sa jeho koncové body posunú o hodnoty u_i^e a u_j^e, takže vektor posunutí prvku je

$$\mathbf{a}^e = \left[u_i^e \quad u_j^e \right]^T$$

Zvolíme lineárnu aproximačnú funkciu posunutia všeobecného bodu prvku

$$\mathbf{u} = \left[u(x)\right] = \left[\alpha_1 + \alpha_2 x\right] = \left[1, x\right]\begin{bmatrix}\alpha_1 \\ \alpha_2\end{bmatrix} = \phi\,\alpha \qquad (2.6\text{- }1)$$



Obrázok 2. 5 Globálne, lokálne a prirodzené súradnice jednorozmerného prvku

Tento vzťah platí aj pre okraje prvku, takže podmienky

$$u\left(x_i^e\right) = u_i^e$$
$$u\left(x_j^e\right) = u_j^e$$

zapíšeme v maticovom tvare

$$\mathbf{a}^e = \begin{bmatrix}u_i^e \\ u_j^e\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & x_i^e \\ 1 & x_j^e\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1 \\ \alpha_2\end{bmatrix} = \mathbf{A}\,\alpha$$

Z týchto rovníc vypočítame koeficienty α

$$\alpha = \begin{bmatrix}\alpha_1 \\ \alpha_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1+\dfrac{x_i^e}{L_e}, & -\dfrac{x_i^e}{L_e} \\ -\dfrac{1}{L_e}, & \dfrac{1}{L_e}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_i^e \\ u_j^e\end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{a}^e$$

Dosadením týchto koeficientov do (1) dostávame vzťah medzi posunutím všeobecného bodu prvku a posunutiami jeho uzlových bodov

$$\mathbf{u} = \left[u(x)\right] = \phi\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}^e = \left[1+\frac{x_i^e - x}{L_e}, \frac{x - x_i^e}{L_e}\right]\begin{bmatrix}u_i^e \\ u_j^e\end{bmatrix} = \left[N_i^e, N_j^e\right]\begin{bmatrix}u_i^e \\ u_j^e\end{bmatrix} = \mathbf{N}^e\mathbf{a}^e \qquad (2.6\text{- }2)$$

Z tohoto vzťahu vidieť, že interpolačné funkcie N_i^e, N_j^e vyjadrujú príspevok posunutí (zložiek posunutí) u_i^e, u_j^e uzlových bodov do vzťahu pre posunutie všeobecného bodu prvku. Vo svojom uzle je príspevok plný, tvarová funkcia sa rovná jednej, v druhom uzle (ostatných uzloch) nulový, tvarová funkcia sa rovná nule (pripomíname, že $x_j^e - x_i^e = L_e$). V našom

prípade máme lineárny prvok, pretože tvarové funkcie sú lineárne – príspevok lineárne narastá smerom k príslušnému uzlovému bodu, funkcia $u(x)$ je lineárny polynom.

Pomerná deformácia prvku bez teplotnej deformácie podľa (2.1- 5) je

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x] = \left[\frac{du}{dx}\right] = \left[\frac{dN_i^e}{dx}, \frac{dN_j^e}{dx}\right]\begin{bmatrix} u_i^e \\ u_j^e \end{bmatrix} = \left[-\frac{1}{L_e}, \frac{1}{L_e}\right]\begin{bmatrix} u_i^e \\ u_j^e \end{bmatrix} = \mathbf{B}^e\mathbf{a}^e = \frac{u_j^e - u_i^e}{L_e} \qquad (2.6\text{- }3)$$

a pre napätie prvku platí Hookeov zákon

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x] = [E_e\varepsilon_x] = E_e\mathbf{B}^e\mathbf{a}^e = E_e\frac{u_j^e - u_i^e}{L_e} \qquad (2.6\text{- }4)$$

Matica tuhosti prvku podľa (2.3- 13) je

$$\mathbf{K}^e = \int_{V_e}\mathbf{B}^{eT}\mathbf{D}^e\mathbf{B}^e dV = S_e\int_{x_i}^{x_j}\begin{bmatrix} -\frac{1}{L_e} \\ \frac{1}{L_e} \end{bmatrix} E_e\left[-\frac{1}{L_e}, \frac{1}{L_e}\right]dx = \begin{bmatrix} k_e & -k_e \\ -k_e & k_e \end{bmatrix} \qquad (2.6\text{- }5)$$

kde $$k_e = \frac{E_eS_e}{L_e}$$

Zo vzťahov (2.3- 15) a (2.3- 16) dostaneme vektor uzlových síl od teplotnej deformácie

$$\mathbf{f}_{\varepsilon_T}^e = \int_{V_e}\mathbf{B}^{eT}\mathbf{D}^e\mathbf{e}_T^e dV = S_e\int_{x_i}^{x_j}\begin{bmatrix} -\frac{1}{L_e} \\ \frac{1}{L_e} \end{bmatrix} E_e\Delta\alpha_T^eT_e dx = \begin{bmatrix} -S_eE_e\Delta\alpha_T^eT_e \\ S_eE_e\Delta\alpha_T^eT_e \end{bmatrix}$$

a vektor uzlových síl od vlastnej tiaže v smere osi x

$$\mathbf{f}_b^e = \int_{V_e}\mathbf{N}^T\mathbf{b}\,dV = S_e\int_{x_i^e}^{x_j^e}\begin{bmatrix} 1+\frac{x_i^e - x}{L_e} \\ \frac{x - x_i^e}{L_e} \end{bmatrix}\rho_e g\,dx = \begin{bmatrix} \frac{\rho_e g S_e L_e}{2} \\ \frac{\rho_e g S_e L_e}{2} \end{bmatrix}$$

kde sme písmenom g označili veľkosť gravitačného zrýchlenia. Vidíme, že vektor teplotnej deformácie nahradí snahu prvku teplotne sa rozťahovať dvomi rovnakými ale opačne orientovanými silami a vektor tiažového zaťaženia rovnomerne rozdelí tiaž prvku do oboch uzlov.

2.6.1.2 Globálne, lokálne a prirodzené súradnice jednorozmerného prvku

V teórii i pri aplikačnom používaní MKP sa môžme stretnúť s viacerými súradnicovými systémami, z ktorých si teraz ozrejmíme len tie, ktoré súvisia s tvorbou matíc prvku. Globálny súradnicový systém telesa, ktorý sa využíva na určovanie polohy uzlov, zadávanie okrajových podmienok a zaťažení, vyčísľovanie primárnych neznámych, vytváranie výsledných matíc a rovníc telesa a pod., nie je vo väčšine prípadov vhodný na priamu tvorbu matíc prvkov.

Tieto matice sa obyčajne tvoria, a celá teória prvku buduje, buď pomocou *lokálnych* alebo *prirodzených* súradníc prvku. Zjednodušuje sa tým práca s geometriou prvku a hlavne výpočet integrálu matice prvku (2.3- 13) a vektorov prvku (2.3- 15) až (2.3- 17). Tieto integrály treba počítať po objeme, resp. časti povrchovej plochy prvku, čo pri zložitejších rovinných a priestorových prvkoch nie je jednoduchá záležitosť.

Objasnime si tieto pojmy opäť na jednorozmernom prútovom prvku. V predchádzajúcom odstavci sme matice tohoto prvku tvorili v globálnom súradnicovom systéme a dostali sme tvarové funkcie prvku (2)

$$N_i^e = 1 + \frac{x_i^e - x}{L_e} \quad , \quad N_j^e = \frac{x - x_i^e}{L_e} \tag{2.6- 6}$$

Zvoľme teraz na prvku lokálny súradnicový systém prvku, t. j. systém, ktorý platí len pre príslušný prvok. Nakoľko ho volíme na všeobecnom, *e*-tom prvku, jeho voľba na prvkoch je, pochopiteľne, jednotná a zaručuje pri každom konkrétnom prvku analogický postup pri vyčísľovaní integrálov i ďalších lokálnych hodnôt prvku. Nech lokálna súradnica prvku $\bar{x}$ má začiatok v uzle *i*, smer totožný s osou prúta a kladný zmysel smerom k uzlu *j* (obr. 2.5).

Nebudeme opakovať výpočet matíc prvku v tomto systéme, pretože postup je úplne analogický s postupom použitým pre globálny systém v predchádzajúcej časti. Z obrázku 2.5 je vidieť, že vzťah medzi globálnou súradnicou x a lokálnou súradnicou $\bar{x}$ je

$$x = x_i^e + \bar{x}$$

V lokálnom systéme sa potom tvarové funkcie prvku zjednodušia na

$$\left.\begin{aligned} N_i^e &= 1 + \frac{x_i^e - x}{L_e} = 1 - \frac{\bar{x}}{L_e} \\ N_j^e &= \frac{x - x_i^e}{L_e} = \frac{\bar{x}}{L_e} \end{aligned}\right\} \tag{2.6- 7}$$

a hlavne sa tiež zjednodušia výpočty matíc prvku, pretože okrem jednoduchších matíc $\mathbf{N}^e$ a $\mathbf{B}^e$ sa nám zjednoduší aj výpočet integrálov vzhľadom na jednoduchšie hranice ($0 \le \bar{x} \le L_e$).

Ako sa môžeme presvedčiť, v tomto prípade matica tuhosti i vektory zaťaženia prvku určené v lokálnom systéme sú rovnaké s maticami vypočítanými v globálnom súradnicovom systéme. Platí to len v prípade jednorozmerného prvku, pretože pri takomto prvku prechod z lokálneho do globálneho systému spôsobí len posunutie prvku, pri ktorom sa hodnoty týchto matíc nemenia. V prípade rovinných a priestorových prvkov, kedy prechod z lokálneho do globálneho systému vyžaduje rovinné alebo priestorové natočenie prvku, je potrebné lokálne matice transformovať (prepočítať) do globálneho súradnicového systému, čo je, ako ukážeme neskôr, algoritmicky jednoduché a na čas nenáročné (myslí sa strojový čas).

Takzvané *prirodzené súradnice prvku* sú v podstate lokálne súradnice v bezrozmernej forme zavedené tak, aby ich hranice boli vhodné na numerické integrovanie pri výpočte matíc prvku. Ak napr. pre jednorozmerný prvok zavedieme súradnicu ξ ($-1 \le \xi \le 1$) vzťahom

$$\xi = \frac{2\bar{x}}{L_e} - 1$$

potom súradnica ξ udáva polohu uzla *i* na prvku hodnotou -1 a polohu uzla *j* hodnotou +1

(obr. 2.5). Ak z tohoto vzťahu vyjadríme $\bar{x}$ a dosadíme do (7) dostávame tvarové funkcie prvku vyjadrené pomocou prirodzenej súradnice

$$\left.\begin{aligned} N_i^e &= \frac{1}{2}(1-\xi) \\ N_j^e &= \frac{1}{2}(1+\xi) \end{aligned}\right\} \qquad (2.6\text{- }8)$$

ktoré, ako vidieť, sú rovnaké pre každý prvok. Tvarové funkcie vyjadrené pomocou prirodzených súradníc majú tie isté vlastnosti, ako mali pri iných typoch súradníc, t. j. v odpovedajúcom uzle majú hodnotu rovnú jednej a v ostatných uzloch rovnú nule. Sú teda tak isto vhodné na interpoláciu (v tomto prípade lineárnu) uzlových hodnôt po elemente (v tomto prípade po dĺžke). Ak napr. poznáme posunutia u_i^e a u_j^e v uzloch i a j dvojuzlového prvku, môžeme posunutie po dĺžke prvku lineárne interpolovať vzťahom

$$u(\xi) = N_i^e u_i^e + N_j^e u_j^e = \frac{1}{2}(1-\xi)u_i^e + \frac{1}{2}(1+\xi)u_j^e \qquad (2.6\text{- }9)$$

Na nájdenie obrazu (polohy) bodu určeného prirodzenou súradnicou na prvku resp. na transformáciu globálnej súradnice x alebo lokálnej $\bar{x}$ na prirodzenú súradnicu ξ sa obyčajne používa rovnaká sústava tvarových funkcií ako pri interpolácii uzlových neznámych a dostávame

$$\left.\begin{aligned} x(\xi) &= N_i^e x_i^e + N_j^e x_j^e = \frac{1}{2}(1-\xi)x_i^e + \frac{1}{2}(1+\xi)x_j^e \\ \bar{x}(\xi) &= N_i^e \bar{x}_i^e + N_j^e \bar{x}_j^e = \frac{1}{2}(1-\xi)\bar{x}_i^e + \frac{1}{2}(1+\xi)\bar{x}_j^e \end{aligned}\right\} \qquad (2.6\text{- }10)$$

Porovnaním (10) a (9) vidíme, že na určenie (interpoláciu) súradnice všeobecného bodu prvku zo súradníc jeho uzlov a na určenie (interpoláciu) hodnoty hľadanej funkcie vo všeobecnom bode prvku z hodnôt tejto funkcie v uzlových bodoch sa použili *rovnaké* interpolačné (tvarové) funkcie N_i^e a N_j^e. Konečný prvok formulovaný takýmto spôsobom sa nazýva *izoparametrický prvok*. Dôležitá dodatočná charakteristika izoparametrického prvku je samozrejme aj to, že je formulovaný pomocou prirodzených súradníc a že jeho matice sa pri zložitejších prvkoch počítajú pomocou numerickej integrácie.

Vo všetkých súradných systémoch možno hľadanú funkciu v prípade potreby aproximovať na prvku aj polynómami vyššieho stupňa (kvadratickým, kubickým atď.). Postup tvorby matíc takéhoto prvku je analogický s postupom, ktorý sme použili pri lineárnom prvku. Napr. kvadratický prvok dostaneme tak, že v (1) zvolíme kvadratický polynóm

$$u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2$$

a pretože obsahuje 3 neznáme koeficienty, musíme na prvku zvoliť tretí, k-ty uzol v strede prvku. Ďalší postup tvorby matíc prvku je rovnaký ako pri lineárnom prvku.

2.6.1.3 Výpočet matíc jednorozmerného izoparametrického prvku

Prirodzené súradnice izoparametrických prvkov sú veľmi vhodné pre numerickú integráciu objemových a plošných integrálov (2.3- 13) a (2.3- 15) až (2.3- 17) zložitejších prvkov,

pravda, ich zavedenie prináša aj niektoré špecifické komplikácie pri ich vyčísľovaní. Vysvetlime si túto problematiku opäť na príklade jednorozmerného izoparametrického lineárneho prvku, pre ktorý tvarové funkcie sú (8), interpolačný vzťah posunutia je (9) a polohu bodu na prvku udáva vzťah (10). Prvý problém sa objaví hneď pri výpočte pomernej deformácie prvku ε a matice $\mathbf{B}^e$ zo vzťahu (3)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x] = \left[\frac{du}{dx}\right] = \left[\frac{dN_i^e}{dx}, \frac{dN_j^e}{dx}\right]\begin{bmatrix} u_i^e \\ u_j^e \end{bmatrix} = \mathbf{B}^e\mathbf{a}^e$$

kde, ako vidieť, treba vyjadriť derivácie tvarových funkcií podľa globálnej premennej x, pričom N_i^e a N_j^e sú fukcie prirodzenej súradnice ξ. Vyjadrenie $\xi = f(x)$ z (10) a dosadenie do (9) pri viacrozmerných prvkoch s vyšším stupňom tvarových funkcií (kvadratických, kubických a pod.) je veľmi zložité, a preto sa využíva výhodnejší postup, ktorý spočíva v tom, že sa vyjadria derivácie tvarových funkcií podľa prirodzených súradníc ako zložených funkcií a tieto vzťahy sa potom invertujú. V našom jednoduchom prípade dostávame

$$\frac{dN_i^e}{d\xi} = \frac{dN_i^e}{dx}\frac{dx}{d\xi} = \frac{dN_i^e}{dx}J_e = \frac{dN_i^e}{dx}\frac{L_e}{2}$$

z toho $$\frac{dN_i^e}{dx} = \frac{1}{J_e}\frac{dN_i^e}{d\xi} = \frac{2}{L_e}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{L_e}$$

analogicky $$\frac{dN_j^e}{dx} = \frac{1}{J_e}\frac{dN_j^e}{d\xi} = \frac{2}{L_e}\frac{1}{2} = \frac{1}{L_e}$$

a z (3) dostávame hodnotu pomernej deformácie prvku

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L_e} & \frac{1}{L_e} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \mathbf{B}^e\mathbf{a}^e = \frac{u_j^e - u_i^e}{L_e}$$

Číslo (u viacrozmerných úloh matica) J_e je Jacobián tohoto zobrazenia, zabezpečujúci v tomto (jednorozmernom) prípade vzťah medzi dĺžkou prvku v globálnom súradnicovom systéme a jeho obrazom v systéme súradnice ξ; diferencovaním (10) dostaneme

$$dx = \frac{L_e}{2}d\xi = J_e\,d\xi$$

a z (2.3- 13) môžme určiť maticu tuhosti prvku

$$\mathbf{K}^e = \int_{V_e}\mathbf{B}^{eT}\mathbf{D}^e\mathbf{B}^e dV = S_e\int_{x_i^e}^{x_j^e}\begin{bmatrix} -\frac{1}{L_e} \\ \frac{1}{L_e} \end{bmatrix}E_e\begin{bmatrix} -\frac{1}{L_e} & \frac{1}{L_e} \end{bmatrix}dx = S_e\int_{-1}^{1}\begin{bmatrix} -\frac{1}{L_e} \\ \frac{1}{L_e} \end{bmatrix}E_e\begin{bmatrix} -\frac{1}{L_e} & \frac{1}{L_e} \end{bmatrix}J_e d\xi =$$

$$= \frac{E_e S_e}{L_e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Podobne sa postupuje aj pri výpočte ďalších matíc prvku.

2.6.1.4 Numerická integrácia funkcií jednej premennej

Ako sme už uviedli, veľkou výhodou použitia prirodzených súradníc je to , že vyčíslovanie integrálov pri výpočte matíc prvku sa vykonáva vždy na rovnakej oblasti s jednotkovými hranicami. V takomto prípade možno s dostatočnou presnosťou použiť na výpočet týchto integrálov numerickú integráciu, čo výrazne uľahčilo formuláciu a algoritmické spracovanie zložito tvarovaných prvkov a ich využitie pri zložitých (napr. nelineárnych) úlohách MKP.

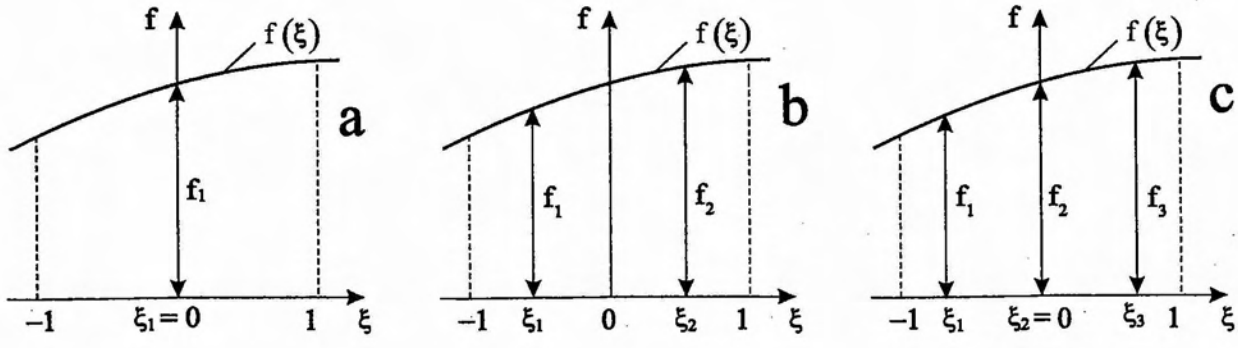
Existuje viacero metód pre numerický výpočet určitého integrálu. Metóda Gaussovej kvadratúry sa najčastejšie využíva v MKP v súvislosti s použitím izoparametrických prvkov. Vysvetlime (alebo zopakujme) si princíp numerickej integrácie podľa tejto metódy v prípade funkcie jednej premennej.

Nech integrál, ktorý máme vypočítať, je

$$I = \int_{-1}^{1} f(\xi) d\xi$$

Najjednoduchší, ale málo presný spôsob numerického výpočtu I, je taký, že vyjadríme hodnotu funkcie v strede intervalu a vynásobíme ju dĺžkou intervalu (obr. 2.6a)

$$I \approx 2f(0) = 2f_1$$



Obrázok 2.6 Hodnoty funkcie v integračných bodoch

Táto hodnota by bola presná len vtedy, keby $f(\xi)$ bola lineárna funkcia. Zovšeobecnenie takéhoto postupu pre n vhodne vybratých bodov (pozri obr. 2.6) dáva

$$I = \int_{-1}^{1} f(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f_i = \sum_{i=1}^{n} w_i f(\xi_i) \qquad (2.6\text{- }11)$$

kde w_i sa nazýva váhový násobok i-tého bodu. Podľa vzťahu (11) teda integrál počítame tak, že vyjadríme hodnotu funkcie f v niekoľkých vybratých bodoch, v tzv. *integračných bodoch*, vynásobíme súčiniteľmi w_i a spočítame.

Pri Gaussovej metóde je poloha bodov ξ_i zvolená tak, že pri danom počte bodov n dosahujeme maximálnu presnosť integrácie. Body sú umiestnené symetricky k stredu intervalu. Pre symetrické body sú násobky rovnaké. V tab. 2.1 sme udali polohu integračných bodov a násobky pre n = 1 až 4. Ak použijeme napr. tri body, pomocou tabuľky a (11) dostávame

$$I \approx \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{0,6}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{0,6}\right)$$

Vo všeobecnosti platí, že ak použijeme n bodov, dostaneme exaktný výsledok pre polynóm stupňa $2n - 1$ alebo nižšieho (napr. [14]).

Tabuľka 2. 1

Počet integračných bodov n	Ich poloha ξ_i	Násobky w_i
1	$\xi_1 = 0$	$w_1 = 2$
2	$\xi_{1,2} = \mp 1/\sqrt{3}$,	$w_1 = w_2 = 1$
3	$\xi_{1,3} = \mp\sqrt{0,6}$, $\xi_2 = 0$	$w_1 = w_2 = 5/9$, $w_2 = 8/9$
4	$\xi_{1,4} = \mp\sqrt{\frac{3+\sqrt{4,8}}{7}}$, $\xi_{2,3} = \mp\sqrt{\frac{3-\sqrt{4,8}}{7}}$	$w_1 = w_4 = 1/2 - \sqrt{30}/36$ $w_2 = w_3 = 1/2 + \sqrt{30}/36$

Princíp použitý pri výpočte násobkov a súradníc bodov Gaussovej kvadratúry si vysvetlíme na príklade s kubickým polynómom

$$f(\xi) = a_1 + a_2\xi + a_3\xi^2 + a_4\xi^3$$

Ak $f(\xi)$ zintegrujeme v intervale od –1 po 1, dostaneme

$$I = \int_{-1}^{1} f(\xi)d\xi = 2a_1 + \frac{2}{3}a_3$$

Vypočítajme teraz tento integrál pomocou dvoch symetricky položených integračných bodov $\xi = \pm\xi_i$ (násobok w je vtedy rovnaký pre oba body)

$$\underset{\sim}{I} = w\, f(-\xi_i) + w\, f(\xi_i) = 2w\left(a_1 + a_3\xi_i^2\right)$$

Ak chceme minimalizovať chybu $e = I - \underset{\sim}{I}$ pre ľubovoľné hodnoty a_1 a a_3, musí platiť

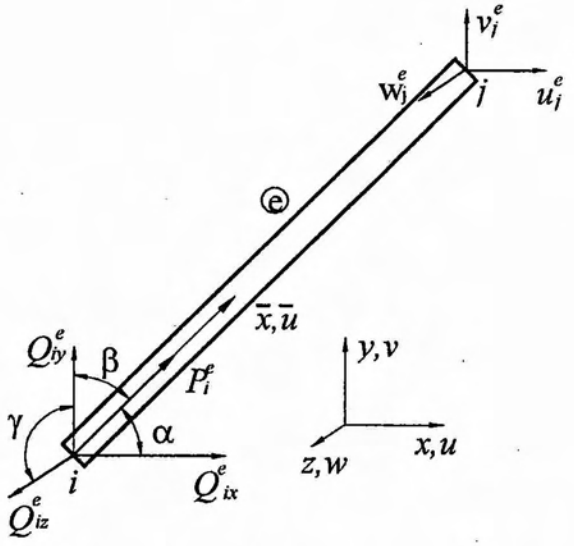
$$\frac{\partial e}{\partial a_1} = 0 \qquad \frac{\partial e}{\partial a_3} = 0$$

Tieto rovnice dávajú

$$w = 1 \qquad \xi_i = 1/\sqrt{3}$$

2.6.1.5 Matice priestorového prútového prvku

Keď pomocou myslených rezov tesne vedľa uzlových bodov vyberieme všeobecný e-tý prvok zo zaťaženej priestorovej prútovej konštrukcie, môžeme v globálnom súradnicovom systéme x, y, z (obr. 2.7) vyjadriť základné matice prvku týmto postupom:



Obrázok 2.7 Priestorový prútový prvok

Vektor posunutia uzlového bodu je

$$\mathbf{a}_i^e = \left[u_i^e \quad v_i^e \quad w_i^e \right]^T \tag{2.6- 12}$$

a vektor posunutia prvku

$$\mathbf{a}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i^e \\ \mathbf{a}_j^e \end{bmatrix} \tag{2.6- 13}$$

Uzlový bod prútového prvku v priestore má teda 3 stupne voľnosti a prvok 6 stupňov voľnosti.

Obdobne zavedieme vektory vnútorných uzlových síl

$$\mathbf{q}_i^e = \left[Q_{ix}^e \quad Q_{iy}^e \quad Q_{iz}^e \right]^T$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_i^e \\ \mathbf{q}_j^e \end{bmatrix}$$

Medzi posunutiami uzlových bodov prvku a uzlovými silami platí všeobecný vzťah (2.4- 5)

$$\mathbf{q}^e = \mathbf{K}^e \mathbf{a}^e - \mathbf{f}^e$$

kde v tomto prípade matica tuhosti prvku v *globálnom* súradnicovom systéme $\mathbf{K}^e$ je štvorcová matica stupňa šesť, ktorú chceme určiť.

Ako vieme z predchádzajúceho odstavca, v lokálnom súradnicovom systéme prvku je situácia jednoduchšia. Prvok má dva stupne voľnosti s vektormi

$$\bar{\mathbf{a}}^e = \left[\bar{u}_i^e \quad \bar{u}_j^e \right]^T \tag{2.6- 14}$$

$$\bar{\mathbf{q}}^e = \left[P_i^e \quad P_j^e \right]^T \tag{2.6- 15}$$

A jeho matice v rovnici rovnováhy prvku

$$\bar{\mathbf{q}}^e = \bar{\mathbf{K}}^e \bar{\mathbf{a}}^e - \bar{\mathbf{f}}^e \tag{2.6- 16}$$

sú z predchádzajúceho textu známe.

Z obr. 2.7 vidieť, že medzi zložkami uzlovej sily v globálnom súradnicovom systéme a uzlovou silou v lokálnom systéme (ktorá je výslednicou týchto zložiek) platí vzťah

$$P_i^e = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{bmatrix}_e \begin{bmatrix} Q_{ix}^e \\ Q_{iy}^e \\ Q_{iz}^e \end{bmatrix} = \mathbf{T}\mathbf{q}_i^e$$

Keďže v uzle j je situácia obdobná, dostávame

$$\bar{\mathbf{q}}^e = \begin{bmatrix} P_i^e \\ P_j^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_i^e \\ \mathbf{q}_j^e \end{bmatrix} = \mathbf{T}_e \mathbf{q}^e \tag{2.6- 17}$$

kde matica

$$\mathbf{T}_e = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{bmatrix}_e \tag{2.6- 18}$$

sa nazýva *transformačná matica prútového prvku*, ktorá podľa (17) umožňuje z globálnych uzlových síl vypočítať uzlové sily v lokálnom systéme.

Je zrejmé, že pomocou tej istej matice môžeme do lokálneho systému transformovať aj ďalšie vektory prvku

$$\bar{\mathbf{a}}^e = \mathbf{T}_e \mathbf{a}^e \tag{2.6- 19}$$

$$\bar{\mathbf{f}}^e = \mathbf{T}_e \mathbf{f}^e \tag{2.6- 20}$$

Ak (17), (19) a (20) dosadíme do (16) , dostávame

$$\mathbf{T}_e \mathbf{q}^e = \bar{\mathbf{K}}^e \mathbf{T}_e \mathbf{a}^e - \mathbf{T}_e \mathbf{f}^e$$

a z toho

$$\mathbf{q}^e = \mathbf{T}_e^{-1} \bar{\mathbf{K}}^e \mathbf{T}_e \mathbf{a}^e - \mathbf{f}^e = \mathbf{K}^e \mathbf{a}^e - \mathbf{f}^e \tag{2.6- 21}$$

Takto sme odvodili všeobecne platný vzťah pre výpočet matice prvku v globálnom súradnicovom systéme pomocou matice určenej v lokálnom systéme prvku

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{T}_e^T \bar{\mathbf{K}}^e \mathbf{T}_e \tag{2.6- 22}$$

V (22) sme mohli použiť rovnosť

$$\mathbf{T}_e^{-1} = \mathbf{T}_e^T$$

pretože $\mathbf{T}_e$, ako sa môžme ľahko presvedčiť, je ortogonálna matica (platí $\mathbf{T}_e \mathbf{T}_e^T = \mathbf{T}_e \mathbf{T}_e^{-1} = \mathbf{1}$). Globálne vektory prvku sa potom z lokálnych získávajú veľmi jednoducho zo vzťahov

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{q}^e &= \mathbf{T}_e^T \bar{\mathbf{q}}^e \\ \mathbf{a}^e &= \mathbf{T}_e^T \bar{\mathbf{a}}^e \\ \mathbf{f}^e &= \mathbf{T}_e^T \bar{\mathbf{f}}^e \end{aligned}\right\} \tag{2.6- 23}$$

Fyzikálna príčina ortogonálnosti matice (18) tkvie v tom, že pri zmene súradnicového systému sa energia vnútorných síl, pochopiteľne, nemení a musí platiť jej rovnosť v oboch systémoch

$$\mathbf{q}^{eT}\mathbf{a}^{e} = \overline{\mathbf{q}}^{eT}\overline{\mathbf{a}}^{e}$$

Po dosadení z (19) máme

$$\mathbf{q}^{eT}\mathbf{a}^{e} = \overline{\mathbf{q}}^{eT}\mathbf{T}_{e}\mathbf{a}^{e}$$

a po vynásobení tejto rovnice sprava s $\left(\mathbf{a}^{e}\right)^{-1}$ sme dokázali, že naozaj platí

$$\mathbf{q}^{e} = \mathbf{T}_{e}^{T}\overline{\mathbf{q}}^{e}$$

kde sme využili známy vzťah z maticovej algebry

$$(\mathbf{AB})^{T} = \mathbf{B}^{T}\mathbf{A}^{T}$$

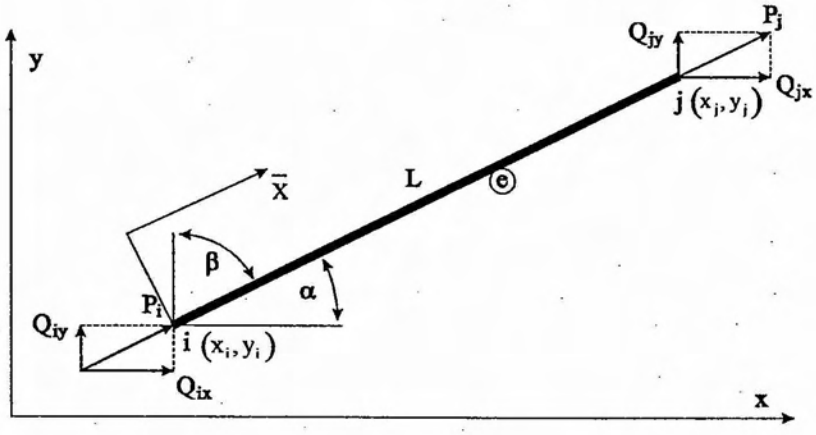
Ďalší postup riešenia úlohy pre prútovú sústavu je už po určení matíc prvku v globálnom súradnicovom systéme rovnaký ako pri všeobecnom priestorovom telese.

Príklad 2.2

Vypočítajte maticu tuhosti rovinného a priestorového prútového prvku v globálnom súradnicovom systéme. (Kvôli jednoduchosti zápisu pri skalárnych hodnotách prvku vynecháme index *e*.)

Situácia, z ktorej vychádzame pri riešení úlohy pre rovinný prvok, je znázornená na obr. 2.8. Vidieť, že pomocou globálnych súradníc uzlových bodov, ktoré sú známe, pretože už sme urobili diskretizáciu geometrie sústavy, ľahko môžeme určiť dĺžku prvku a smerové kosínusy jeho stredovej čiary

$$L = \sqrt{\left(x_j - x_i\right)^2 + \left(y_j - y_i\right)^2} \qquad \cos\alpha = \frac{x_j - x_i}{L} \qquad \cos\beta = \sin\alpha = \frac{y_j - y_i}{L}$$



Obrázok 2. 8 Rovinný prútový prvok

Uzlové sily v lokálnom systéme sú

$$\overline{\mathbf{q}}^{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} P_i \\ P_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \cos\beta \end{bmatrix} \mathbf{q}^{e} = \mathbf{T}_{e}\mathbf{q}^{e}$$

čím sme určili transformačnú maticu prvku $\mathbf{T}_e$. Zo vzťahov (22) a (5) vypočítame maticu tuhosti prvku

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{T}_e^T \bar{\mathbf{K}}^e \mathbf{T}_e = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 \\ \cos\beta & 0 \\ 0 & \cos\alpha \\ 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \cos\beta \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha\cos\beta & -\cos^2\alpha & -\cos\alpha\cos\beta \\ & \cos^2\beta & -\cos\alpha\cos\beta & -\cos^2\alpha \\ & & \cos^2\alpha & \cos\alpha\cos\beta \\ & \text{SYM} & & \cos^2\beta \end{bmatrix}$$

Maticu tuhosti priestorového prvku určíme obdobne. Platí (pozri obr. 2.7)

$$L = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{x_j - x_i}{L}, \quad \cos\beta = \frac{y_j - y_i}{L}, \quad \cos\gamma = \frac{z_j - z_i}{L}$$

Transformačnú maticu prvku udáva vzťah (18) a môžeme napísať

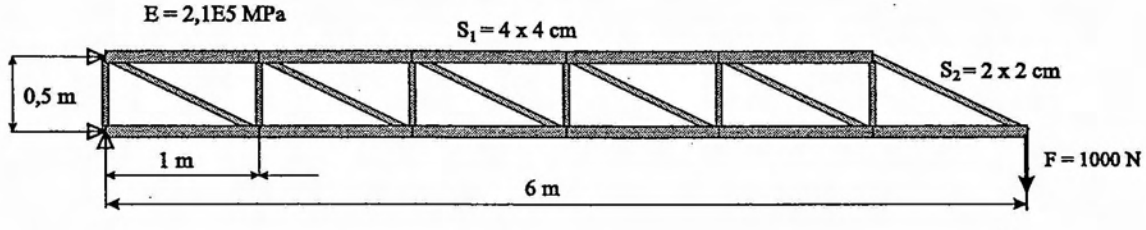
$$\mathbf{K}^e = \mathbf{T}_e^T \bar{\mathbf{K}}^e \mathbf{T}_e = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 \\ \cos\beta & 0 \\ \cos\gamma & 0 \\ 0 & \cos\alpha \\ 0 & \cos\beta \\ 0 & \cos\gamma \end{bmatrix} \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\gamma & -\cos^2\alpha & -\cos\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\cos\gamma \\ & \cos^2\beta & \cos\beta\cos\gamma & -\cos\alpha\cos\beta & -\cos^2\beta & -\cos\alpha\cos\gamma \\ & & \cos^2\gamma & -\cos\alpha\cos\gamma & -\cos\beta\cos\gamma & \cos^2\gamma \\ & & & \cos^2\alpha & \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\gamma \\ & & \text{SYM} & & \cos^2\beta & \cos\beta\cos\gamma \\ & & & & & \cos^2\gamma \end{bmatrix}$$

Z výsledných vzťahov pre matice tuhosti oboch prvkov vidieť, že pri translácii prútového prvku sa jeho matica tuhosti nemení.

Príklad 2. 3

Pre rovinnú prútovú sústavu zadanú na obrázku vypočítajte sily a napätia pôsobiace v prútoch pri jej zaťažení silou F. Určte tiež reakcie pôsobiace v dokonale tuhých upevňovacích väzbách. Pri výpočte zohľadnite aj vlastnú tiaž konštrukcie, keď materiál prútov má hustotu $\rho = 7850$ kg/m^3.



1. Zadanie názvu úlohy
Utility Menu>File>Change Jobname..., /FILNAM = PRUTOVKA2D, OK;

2. Otvorenie predprocesora
Ansys Main Menu>Preprocessor;

3. Zadanie typu prvku pre úlohu
Preprocessor>Element Type>Add/Edit/Delete, Add... Link 2D Spar 1, OK, Close;

4. Zadanie dvoch prierezových skupín (prierezových konštánt)
Preprocessor>Real Constants>Add/Edit/Delete, Add... (Typ 1 Link1), OK, Area = 0.04*0.04, OK, *Add...*, (Typ 1 Link1), OK, Area = 0.02*0.02, OK, Close;

5. Zadanie materiálovej skupiny
Preprocessor>Material Props>Material Models... (Material Model Number 1), Structural, Density, DENS = 7850, OK, Linear, Elastic, Isotropic, EX = 2.1e11, PRXY = 0.3, OK, Material, Exit;

6. Zapnutie trvalého číslovania uzlových bodov kvôli kontrole
Utility Menu>PlotCtrls>Numbering... NODE = ON, OK;

7. Vytvorenie prvých dvoch uzlových bodov úlohy v mieste väzieb (číslovanie je automatické)
Preprocessor>Modeling>Create>Nodes>In Active CS... X = 0, Y = 0, Apply,
X = 0, Y = 0.5, OK;

8. Uloženie databázy pred „nebezpečnými" kopírovacími príkazmi
Ansys Toolbar>Save DB
(V prípade potreby sa k tomuto stavu môžme vrátiť príkazom *Ansys Toolbar>Resume DB*)

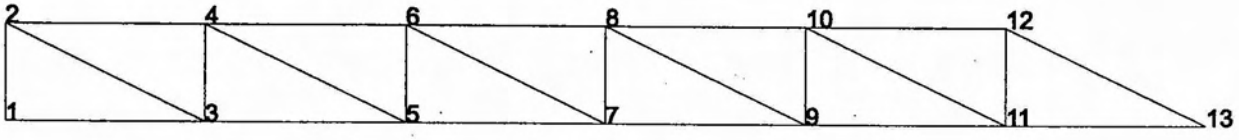
9. Vytvorenie ďalších uzlov kopírovaním
Preprocessor> Modeling>Copy>Nodes>Copy↑ Kliknúť spodný uzol, Apply..., ITIME=7, DX=1, (INC=2), Apply,
Kliknúť horný uzol, OK..., ITIME=6, (DX=1), INC=2 (!), OK;

10. Vytvorenie prvých prvkov s väčším prierezom kliknutím ich uzlov
Preprocessor>Modeling>Create>Elements>Auto Numbered>Thru Nodes↑ P: Uzol 1, P: Uzol 3, Apply, P: Uzol 2, P: Uzol 4, OK;

11. Aktualizácia údajov pre prvky s menším prierezom
Preprocessor > Modeling>Create> Elements>Elem Attributes... REAL = 2, OK;

12. Vytvorenie prvých prvkov s menším prierezom kliknutím ich uzlov
Preprocessor>Modeling>Create>Elements>Auto Numbered>Thru Nodes↑ P: Uzol 1, P: Uzol 2, Apply, P: Uzol 2, P: Uzol 3, OK;

13. Vytvorenie ostatných prvkov kopírovaním
Preprocessor>Modeling>Copy>Elements>Auto Numbered↑ P: horný vodorovný prvok, Apply, ITIME=5, NINC=2, Apply, P: ostatné tri prvky pri väzbách, OK, ITIME=6, OK, (NINC=2), OK;



14. Upevnenie uzlov 1 a 2
Main Menu>Solution>Define Loads>Apply>Structural>Displacement> On Nodes↑
P: Uzol 1, P: Uzol 2, Apply, Vyznačiť UX, Apply, P: Uzol1, OK, Vyznačiť UY, OK;

15. Zadanie sily do uzla 13
Solution>Define Loads>Apply>Structural>Force/Moment>On Nodes↑ P: Uzol 13, OK, Vyznačiť FY, Value = -1000, OK;

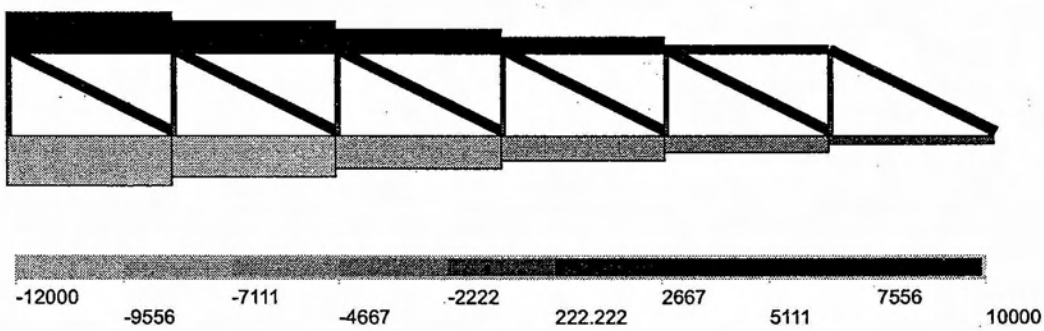
16. Príkaz na vykonanie výpočtu (zatiaľ bez vlastnej tiaže, lebo sme nezadali gravitačné zrýchlenie; je rovné nule)
Solution>Solve>Current LS... Solve Current Load Step, OK;

17. Vypísanie reakcií
Main Menu>General Postproc>List Results>Reaction Sol... All Struct force, OK;

```
REACTION SOLUTIONS PER NODE
THE FOLLOWING X,Y,Z SOLUTIONS ARE IN GLOBAL COORDINATES
    NODE       FX          FY
       1    12000.      1000.0
       2   -12000.
```

18. Vyselektovanie síl v prútoch z výsledkovej databázy
General Postproc>Element Table>Define Table, Add... Do okna LAB napíšte: SILY, Vyznačte v ľavom okne: *By sequence num*; Napíšte do pravého spodného okna: SMISC,1, Kliknite OK, Close;

19. Grafické znázornenie síl na prvkoch
General Postproc>Plot Results>Contour Plot>Line Elem Res... Do okna LABI napíšte: SILY, do okna LABJ napíšte: SILY, OK:



20. Zadanie smeru a veľkosti gravitačného zrýchlenia
Solution>Define Loads>Apply>Structural>Inertia>Gravity... ACELY = 9.81, OK;

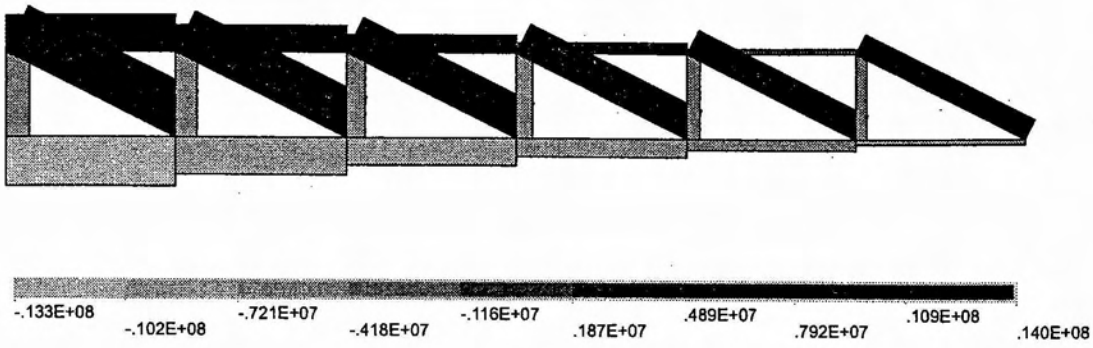
21. Príkaz na vykonanie výpočtu (už i s vlastnou tiažou prútov, predchádzajúce výsledky sa prepíšu)
Solution>Solve>Current LS... Solve Current Load Step, OK;

22. Vypísanie reakcií
Main Menu>General Postproc>List Results>Reaction Sol... All Struct force, OK;

```
REACTION SOLUTIONS PER NODE
THE FOLLOWING X,Y,Z SOLUTIONS ARE IN GLOBAL COORDINATES
    NODE       FX          FY
       1    21218.      2654.4
       2   -21218.
```

23. Vyselektovanie napätí v prútoch z výsledkovej databázy
General Postproc>Element Table>Define Table, Add... Do okna LAB napíšte: NAPATIA, Vyznačte v ľavom okne: *By sequence num*; Napíšte do pravého spodného okna: LS, 1, OK, Close;

24. Grafické znázornenie osového napätia na prvkoch
General Postproc>Plot Results>Contour Plot>Line Elem Res... Do okna LABI načítajte: NAPATIA, do okna LABJ načítajte: NAPATIA, OK:



25. Ukončenie práce s úlohou
Ansys Toolbar>Quit... Save Geom+Loads, OK;

Poznámky k príkladu 2.3

1. V príklade sa využíva automatické číslovanie uzlov i prvkov. V prípade, že uzol alebo prvok kvôli oprave vymažeme a pri jeho opätovnej tvorbe chceme, aby jeho číslo zostalo nezmenené, musíme už toto číslo explicitne zadať, inak mu program pridelí číslo n+1, kde n je najväčšie existujúce číslo danej entity. Ak sa pomýlime napr. pri kopírovaní uzlov a všetky ich vymažeme, potom ak chceme začínať s číslovaním od jednotky, treba použiť príkaz *Preprocessor>Numbering Ctrls>Set Start Num.* Na tejto príkazovej trase je aj dôležitý príkaz *Merge Items*, ktorý nám zlikviduje duplikáty entít z chybného modelovania, ktoré by mohli vyvolať nepríjemné ťažkosti pri výpočte úlohy. Pre rozmerovú kontrolu je užitočný aj príkaz *Preprocessor>Modeling>Check Geom*, pomocou ktorého zisťujeme vzdialenosti medzi uzlami, resp. bodmi modelu.

2. Niekoho možno prekvapilo kladné znamienko pri hodnote gravitačného zrýchlenia v smere y. Program počíta vlastnú tiaž ako zotrvačnú silu (pozri dynamické úlohy), ktorá má opačný zmysel ako zadané zrýchlenie.

2.6.2 Rámové konštrukcie

Aplikačná oblasť rámových konštrukcií je v strojárstve a stavebníctve veľmi široká. Spomeňme aspoň dopravnú techniku, lodný a letecký priemysel, mosty a budovy. Pri výpočte týchto konštrukcií postupujeme rovnako ako pri prútových konštrukciách, matice nosníkových prvkov sú však zložitejšie. Vyplýva to z toho, že pri prútovom prvku sme v lokálnom súradnicovom systéme mali v myslenom reze jedinú výslednicu vnútorných síl (osovú silu), pri priestorovom nosníkovom prvku máme týchto výsledníc šesť: osovú silu P, dve pravouhlé zložky priečnej sily T, dve zložky ohybového momentu M_o a krútiaci moment M_k. Sú to vlastne zložky priestorovej sily a priestorového momentu rozložené v danom bode stredovej čiary do lokálneho systému prvku. Z takto rozložených výsledníc sme v lokálnom súradnicovom systéme schopní vypočítať nimi vyvolané normálové, resp. šmykové napätia, poskladať ich podľa zásad kombinovaného namáhania na redukované napätie a dimenzovať, resp. kontrolovať kritické miesta konštrukcie.

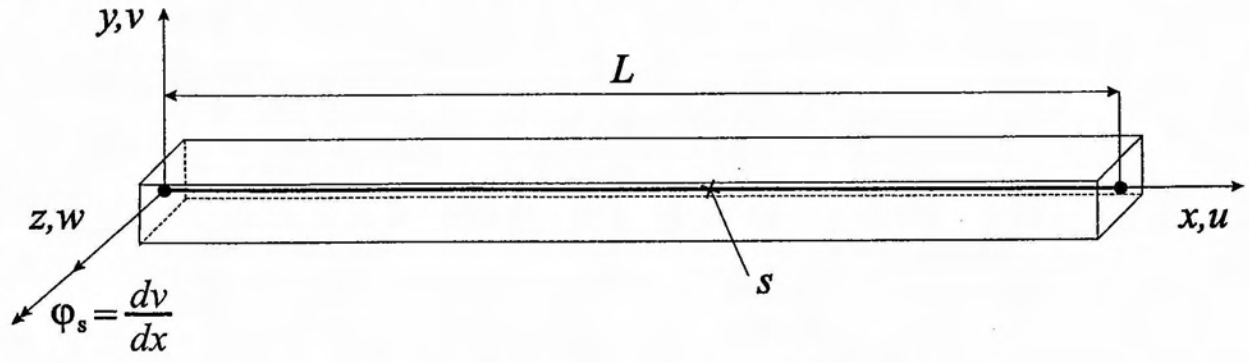
Vo výpočtovej praxi sú pre rámovú konštrukciu často splnené podmienky:

1. všetky stredové čiary nosníkov ležia v jednej rovine
2. všetky zaťaženia pôsobia v tej istej rovine
3. jedna z hlavných centrálnych osí každého prierezu leží v tejto rovine

V takom prípade hovoríme o *rovinnej rámovej konštrukcii* a o rovinnom ohybe jeho nosníkov v tejto rovine. Počet výsledníc vnútorných síl sa v takomto prípade zredukuje na tri: osová sila P, priečna sila T a ohybový moment M_o.

2.6.2.1 Deformačná teória rovinného nosníka

V klasickej teórii nosníka sa predpokladá (napr. [15], [16]), že pri zaťažení sa jeho prierezy pohybujú (posunú a natočia) ako tuhý celok a zostanú teda rovinné. Uvažujme nosník s dĺžkou L, prierezom S a ohyb v rovine x, y (obr. 2.9). Ak sú priehyby nosníka malé a ide o rovinný ohyb, pre posunutie ľubovoľného bodu nosníka v smere x platí



Obrázok 2.9 Súradnicový systém rovinného nosníka

$$u(x,y,z) = u_s(x) - y\frac{dv_s}{dx} = u_s(x) - y\varphi_s x \tag{2.6.2- 1}$$

kde

$$\varphi_s = \frac{dv_s}{dx} \tag{2.6.2- 2}$$

je uhol dotyčnice k zdeformovanej stredovej čiare (*priehybovej čiare*). Posunutie bodov stredovej čiary v smere osí x a y udávajú funkcie u_s a v_s. Na základe zavedených predpokladov pre ostatné dve zložky posunutia platí

$$v(x,y,z) = v_s(x) \tag{2.6.2- 3}$$

$$w(x,y,z) = 0 \tag{2.6.2- 4}$$

Zo vzťahov (2.1- 6) a (1) dostávame jedinú nenulovú zložku vektora pomernej deformácie

$$\varepsilon = \varepsilon_x = \frac{du_s}{dx} - y\frac{d^2v_s}{dx^2} = \frac{du_s}{dx} - y\frac{d\varphi}{dx} \tag{2.6.2- 5}$$

pretože

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{dv_s}{dx} + \frac{dv_s}{dx} = 0 \tag{2.6.2- 6}$$

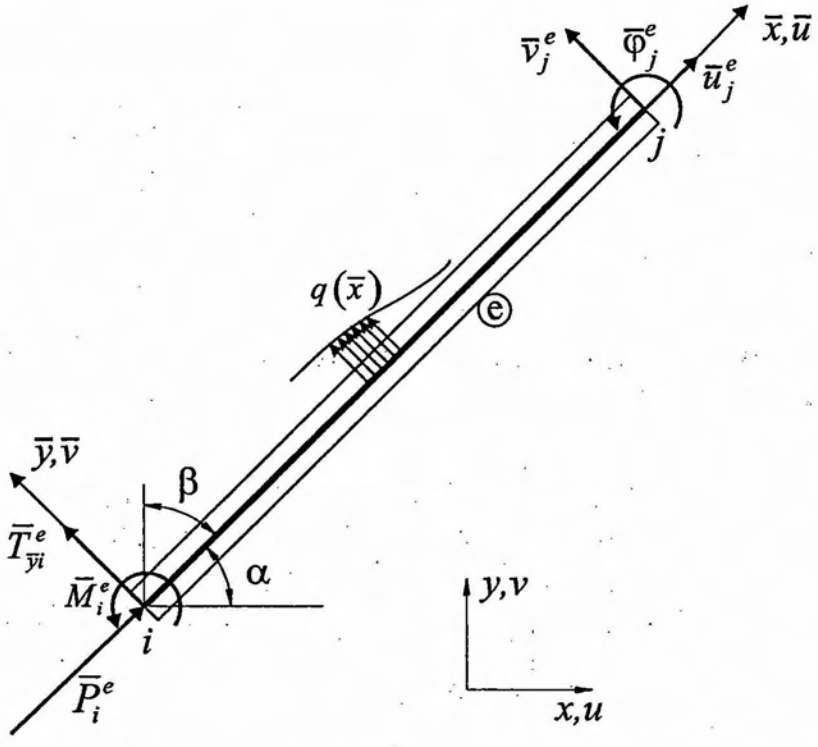
a pri ostatných zložkách je rovnosť nule zrejmá. Vzťah (5) vyjadruje rovnosť uhla natočenia prierezu a uhla dotyčnice k priehybovej čiare, a tým vlastne kolmosť prierezov na priehybovú čiaru. Vidieť tiež, že pri takomto riešení sa neuvažuje vplyv šmykového napätia, a pretože aj σ_y a σ_z sú nulové, dostávame jedinú nenulovú zložku napätia

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_x = E\varepsilon_x = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.6.2- 7}$$

Za týchto predpokladov, ako vidieť, výpočet posunutí, deformácií i napätí nosníka spočíva v nájdení funkcií $u_s(x)$, $v_s(x)$ a $\varphi_s(x)$.

2.6.2.2 Určenie matíc rovinného rámového prvku

Uvažujme teraz všeobecný e-ty konečný prvok vybraný myslenými rezmi nekonečne blízko uzlov zo zaťaženej rovinnej rámovej konštrukcie v lokálnom súradnicovom systéme $\bar{x},\bar{y}$ (obr. 2.10). Prvok má koncové body i a j v krajných bodoch jeho stredovej čiary a po svojej dĺžke konštané hodnoty prierezu S_e, hlavného centrálneho kvadratického momentu prierezu I_e k osi kolmej na rovinu $\bar{x}\,\bar{y}$ a modulu pružnosti v ťahu materiálu E_e.



Obrázok 2.10 Rovinný nosníkový prvok

Vektor posunutí uzlových bodov prvku, ktorý je totožný s vektorom posunutí koncových bodov prvku, zvolíme v tvare

$$\bar{\mathbf{a}}^e = \left[\bar{u}_i^e \quad \bar{v}_i^e \quad \bar{\varphi}_i^e \quad \bar{u}_j^e \quad \bar{v}_j^e \quad \bar{\varphi}_j^e\right]^T \tag{2.6.2- 8}$$

a k nemu priradený vektor lokálnych vnútorných uzlových síl prvku bude

$$\bar{\mathbf{q}}^e = \left[\bar{P}_i^e \quad \bar{T}_i^e \quad \bar{M}_i^e \quad \bar{P}_j^e \quad \bar{T}_j^e \quad \bar{M}_j^e\right]^T \tag{2.6.2- 9}$$

ktorý obsahuje osové sily, priečne sily a ohybové momenty v rezoch tesne vedľa uzlov.

Uzol má teda jeden rotačný a dva posuvné stupne voľnosti, celkovo má prvok šesť stupňov voľnosti. Funkcie zložiek posunutia všeobecného bodu stredovej čiary prvku potom môžeme aproximovať pomocou polynómov so šiestimi koeficientami. Pre $\bar{x}$ – ovú zložku zvolíme, tak ako pri prútovom prvku, lineárny polynóm

$$u_s = \alpha_1 + \alpha_2 \bar{x} \tag{2.6.2- 10}$$

pre $\overline{y}$ – ovú zložku kubický polynóm

$$v_s = \alpha_3 + \alpha_4 \overline{x} + \alpha_5 \overline{x}^2 + \alpha_6 \overline{x}^3 \qquad (2.6.2\text{- }11)$$

a pre natočenie prierezu podľa (2) dostávame

$$\varphi_s = \alpha_4 + 2\alpha_5 \overline{x} + 3\alpha_6 \overline{x}^2 \qquad (2.6.2\text{- }12)$$

V maticovom tvare posunutie všeobecného bodu strednice prvku bude

$$\overline{\mathbf{u}}_s = \begin{bmatrix} \overline{u}_s \\ \overline{v}_s \\ \overline{\varphi}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \overline{x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \overline{x} & \overline{x}^2 & \overline{x}^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\overline{x} & 3\overline{x}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix} = \overline{\boldsymbol{\phi}}_s \boldsymbol{\alpha} \qquad (2.6.2\text{- }13)$$

Funkcie (13) budú fyzikálne správne, keď v krajných bodoch prvku dajú posunutia uzlových bodov ($x_i = 0,\ x_j = L_e$)

$$\mathbf{a}^e = \begin{bmatrix} \overline{u}_i \\ \overline{v}_i \\ \overline{\varphi}_i \\ \overline{u}_j \\ \overline{v}_j \\ \overline{\varphi}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L_e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_e & L_e^2 & L_e^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2L_e & 3L_e^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_e \boldsymbol{\alpha} \qquad (2.6.2\text{- }14)$$

Z rovníc (14) vypočítame koeficienty $\boldsymbol{\alpha}$ a po zapísaní v maticovom tvare dostávame

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/L_e & 0 & 0 & 1/L_e & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3/L_e^2 & -2/L_e & 0 & 3/L_e^2 & -1/L_e \\ 0 & 2/L_e^3 & 1/L_e^2 & 0 & -2/L_e^3 & 1/L_e^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{u}_i \\ \overline{v}_i \\ \overline{\varphi}_i \\ \overline{u}_j \\ \overline{v}_j \\ \overline{\varphi}_j \end{bmatrix} = \mathbf{A}_e^{-1} \mathbf{a}^e \qquad (2.6.2\text{- }15)$$

Dosadením (15) do (13) dostávame

$$\mathbf{u}_s = \boldsymbol{\phi}_s \mathbf{A}_e^{-1} \mathbf{a}^e = \mathbf{N}_s^e \mathbf{a}^e \qquad (2.6.2\text{- }16)$$

kde

$$\mathbf{N}_s = \begin{bmatrix} 1-\frac{\overline{x}}{L_e} & 0 & 0 & \frac{\overline{x}}{L_e} & 0 & 0 \\ 0 & 1-\frac{3\overline{x}^2}{L_e^2}+\frac{2\overline{x}^3}{L_e^3} & \overline{x}-\frac{2\overline{x}^2}{L_e}+\frac{\overline{x}^3}{L_e^2} & 0 & \frac{3\overline{x}^2}{L_e^2}-\frac{2\overline{x}^3}{L_e^3} & -\frac{\overline{x}^2}{L_e}+\frac{\overline{x}^3}{L_e^2} \\ 0 & -\frac{6\overline{x}}{L_e^2}+\frac{6\overline{x}^2}{L_e^3} & 1-\frac{4\overline{x}}{L_e}+\frac{3\overline{x}^2}{L_e^2} & 0 & \frac{6\overline{x}}{L_e^2}-\frac{6\overline{x}^2}{L_e^3} & -\frac{2\overline{x}}{L_e}+\frac{3\overline{x}^2}{L_e^2} \end{bmatrix} \qquad (2.6.2\text{-}17)$$

Pre vektor pomernej deformácie všeobecného bodu prvku podľa (5) a (16) platí

$$\boldsymbol{\varepsilon}_e = \varepsilon_x = \mathbf{B}_e \mathbf{a}^e \qquad (2.6.2\text{-}18)$$

kde

$$\mathbf{B}_e = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L_e} & \overline{y}\left(\frac{6}{L_e^2}-\frac{12\overline{x}}{L_e^3}\right) & \overline{y}\left(\frac{4}{L_e}-\frac{6\overline{x}}{L_e^2}\right) & \frac{1}{L_e} & \overline{y}\left(-\frac{6}{L_e^2}+\frac{12\overline{x}}{L_e^3}\right) & \overline{y}\left(\frac{2}{L_e}-\frac{6\overline{x}}{L_e^2}\right) \end{bmatrix} \qquad (2.6.2\text{-}19)$$

Dosadením matice $\mathbf{B}_e$ do vzorca (2.3-13) a vyjadrením integrálu najprv po ploche S_e prvku a potom po jeho dĺžke L_e dostávame maticu tuhosti rovinného nosníkového (rámového) prvku v lokálnom súradnicovom systéme $\overline{x}, \overline{y}$:

$$\overline{\mathbf{K}}^e = \begin{bmatrix} \frac{E_e S_e}{L_e} & 0 & 0 & -\frac{E_e S_e}{L_e} & 0 & 0 \\ & \frac{12E_e I_e}{L_e^3} & \frac{6E_e I_e}{L_e^2} & 0 & -\frac{12E_e I_e}{L_e^3} & \frac{6E_e I_e}{L_e^2} \\ & & \frac{4E_e I_e}{L_e} & 0 & -\frac{6E_e I_e}{L_e^2} & \frac{2E_e I_e}{L_e} \\ & & & \frac{E_e S_e}{L_e} & 0 & 0 \\ & \text{SYM} & & & \frac{12E_e I_e}{L_e^3} & -\frac{6E_e I_e}{L_e^2} \\ & & & & & \frac{4E_e I_e}{L_e} \end{bmatrix} \qquad (2.6.2\text{-}20)$$

Pri vyjadrení jej členov sme využili vzťahy

$$I_e = \int_{S_e} \overline{y}^2 dS$$

$$\int_{S_e} \overline{y}\, dS = 0 \qquad \text{(Moment plochy k osi cez ťažisko sa rovná nule.)}$$

Vektor spojitého prvkového zaťaženia vypočítame zo vzťahov (2.3-15) až (2.3-17). Ak napr.

na nosník v lokálnom systéme pôsobí normálové spojité zaťaženie $q(\bar{x})$ v [N/m], náhradné vonkajšie uzlové sily od tohoto zaťaženia vypočítame zo vzťahu (2.3- 17)

$$\bar{\mathbf{f}}_S^e = \int_0^{L_e} \mathbf{N}_s^T \begin{bmatrix} 0 \\ q(\bar{x}) \\ 0 \end{bmatrix} d\bar{x} =$$

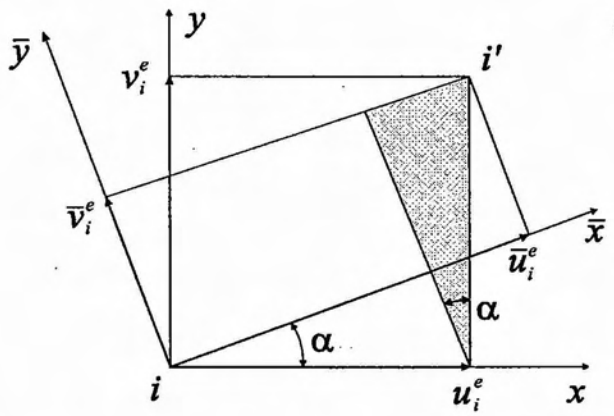
$$= \int_0^{L_e} \begin{bmatrix} 0 & 1-\frac{3\bar{x}^2}{L_e^2}+\frac{2\bar{x}^3}{L_e^3} & \bar{x}-\frac{2\bar{x}^2}{L_e}+\frac{\bar{x}^3}{L_e^2} & 0 & \frac{3\bar{x}^2}{L_e^2}-\frac{2\bar{x}^3}{L_e^3} & -\frac{\bar{x}^2}{L_e}+\frac{\bar{x}^3}{L_e^2} \end{bmatrix}^T q(\bar{x}) d\bar{x} \qquad (2.6.2\text{- }21)$$

V prípade konštantného zaťaženia $q(\bar{x}) = q$ dostávame

$$\bar{\mathbf{f}}^e = q\begin{bmatrix} 0 & L_e/2 & L_e^2/12 & 0 & L_e/2 & -L_e^2/12 \end{bmatrix}^T \qquad (2.6.2\text{- }22)$$

Analogicky možno určiť aj vonkajšie uzlové sily prvku od spojitého osového, resp. momentového zaťaženia.

Transformačná matica **T**, ktorá prepočíta posunutia uzlového bodu i z globálneho rovinného súradnicového systému x, y do lokálneho systému prvku $\bar{x}, \bar{y}$ sa dá ľahko určiť z obr. 2.11, podľa ktorého platí



$$\bar{\varphi}_i^e = \varphi_i^e$$

Obrázok 2.11 Zložky posunutia uzla i v lokálnom a globálnom súradnicovom systéme prvku

$$\bar{\mathbf{a}}_i^e = \begin{bmatrix} \bar{u}_i^e \\ \bar{v}_i^e \\ \bar{\varphi}_i^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^e \\ v_i^e \\ \varphi_i^e \end{bmatrix} = \mathbf{T}\mathbf{a}_i^e \qquad (2.6.2\text{- }23)$$

kde nenulové členy v prvých dvoch riadkoch matice **T** sú vlastne smerové kosínusy lokálnej osi $\bar{x}$ (prvý riadok) a osi $\bar{y}$ (druhý riadok) ku globálnym osiam x a y. Natočenie okolo osi z je, samozrejme, v obidvoch súradných systémoch rovnaké.

Pretože ten istý vzťah platí aj pre uzol j, transformačný vzťah pre vektor posunutia uzlov prvku je

$$\bar{\mathbf{a}}^e = \mathbf{T}_e \mathbf{a}^e \ , \ \text{kde} \ \mathbf{T}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (2.6.2\text{-}24)$$

a analogicky ako posunutia môžeme zapísať v lokálnom systéme aj vnútorné uzlové sily prvku

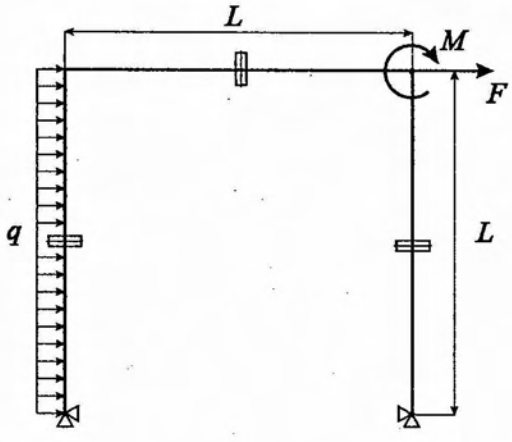
$$\bar{\mathbf{q}}^e = \mathbf{T}_e \mathbf{q}^e \qquad (2.6.2\text{-}25)$$

Matica tuhosti prvku v globálnom systéme bude $\mathbf{K}^e = \mathbf{T}_e^T \bar{\mathbf{K}}^e \mathbf{T}_e$ a k sústredeným vonkajším silám a momentom rámu, ktoré zadáme priamo do príslušných uzlov, pribudnú ešte vo výpočtovom cykle programu cez všetky prvky sily a momenty od lokálneho spojitého zaťaženia prvkov zo vzťahu $\mathbf{f}^e = \mathbf{T}_e^T \bar{\mathbf{f}}^e$.

Vytvorili sme tak všetky potrebné vzťahy na riešenie rovinných rámových konštrukcií pomocou MKP. Algoritmus riešenia je rovnaký, ako u úlohy pre všeobecné priestorové teleso a ako vlastne u všetkých lineárnych statických pevnostných úloh:
Po vytvorení výpočtového modelu program v cykle cez všetky prvky vytvorí v globálnom systéme výslednú matica tuhosti rámu **K** a výsledný globálny vektor vonkajších síl **f**. Z výslednej sústavy rovníc $\mathbf{Ka} = \mathbf{f}$ sa vypočítajú primárne neznáme - globálne posunutia uzlov **a**. Program ich uloží do výsledkovej databázy, v postprocesore ich môžeme vypísať a graficky znázorniť, poskytujú údaje a prehľad o deformácii konštrukcie. V uvedenom cykle program vypočíta podľa (2.4- 5) globálne vnútorné sily $\mathbf{q}^e = \mathbf{K}^e \mathbf{a}^e - \mathbf{f}^e$ všetkých prvkov a transformuje ich do lokálneho systému prvkov na hodnoty $\bar{\mathbf{q}}^e$, ktoré majú jasný použiteľný význam pre pevnostnú kontrolu (osová sila, priečna sila, ohybový moment).

Príklad 2.4

Pre rovinnú oceľovú nosníkovú konštrukciu znázornenú na obrázku určte priebeh ohybového momentu a maximálne normálové napätie, keď je dané: L = 2 m, F = 1000 N, M = 4000 Nm, q = 2000 N/m. Nosníky konštrukcie majú obdĺžnikový prierez 80x40 mm. Vlastnú tiaž zanedbáme a predpokladáme také podopretie konštrukcie kolmo na jej rovinu, že nemôže dôjsť k strate stability v tomto smere.



1. Zadanie názvu úlohy
Utility Menu File Change Jobname ... /FILNAM = NOSNIK2D, OK;

2. Zadanie typu prvku pre úlohu
Main Menu>Preprocessor>Element Type>Add/Edit/Delete, Add... Beam 2D Elastic 3, OK, Close;

3. Zavedenie parametrov pre rozmery prierezu prvku
Input Window: h = 0.08, *Enter*, b = 0.04, *Enter;*

4. Kontrola zadaných parametrov
Utility Menu>Parameters>Scalar Parameters... Close;

5. Prierezové údaje
Preprocessor>Real Constants>Add/Edit/Delete, Add... (Typ 1 BEAM3) OK, AREA = h*b,
IZZ = 1/12*b*h**3, HEIGHT = h, OK, Close;

6. Materiálové údaje
Preprocessor>Material Props>Material Models, Structural, Linear, Elastic, Isotropic... EX = 2.1e11,
PRXY = 0.3, OK, Material, Exit;

7. Zapnutie trvalého číslovania entít kvôli kontrole
Utility Menu>PlotCtrls>Numbering...KP = ON, LINE = ON, OK;

8. Vytvorenie koncových bodov stredových čiar nosníkov (číslovanie je automatické)
Preprocessor>Modeling>Create>Keypoints>In Active CS... X = 0, Y = 0, Apply,
X = 0, Y = 2, Apply,
X = 2, Y = 2, Apply,
X = 2, Y = 0, OK;

9. Vytvorenie čiar modelu
Preprocessor>Modeling>Create>Lines>Lines>Straight Line↑ P: KP1, P: KP2,
P: KP2, P: KP3,
P: KP3, P: KP4, OK;

10. Tvorba prvkov.
(Volíme hustotu 50 prvkov na čiare. Hustota pri nosníkových prvkoch nemá vplyv na presnosť riešenia, ale umožní nám kvalitné grafické znázornenie priebehu vypočítaných veličín po čiarach nosníkov.)
Preprocessor>Meshing>Mesh Tool... Size Controls: Global, Set, Ndiv = 50, OK, Mesh, Pick All;

11. Návrat k očíslovaným bodom a čiaram
Utility Menu>Plot>Lines;

12. Upevnenie modelu
Main Menu>Solution>Define Loads>Apply>Structural>Displacement> On Keypoints↑
P: KP1, P: KP4, OK, Vyznačiť UX a UY, OK;

13. Zadanie sily a momentu do bodu 3.
Zmysel točenia momentu sa určuje podľa pravidla pravej ruky vzhľadom na globálny súradnicový systém. V našom prípade je záporný.

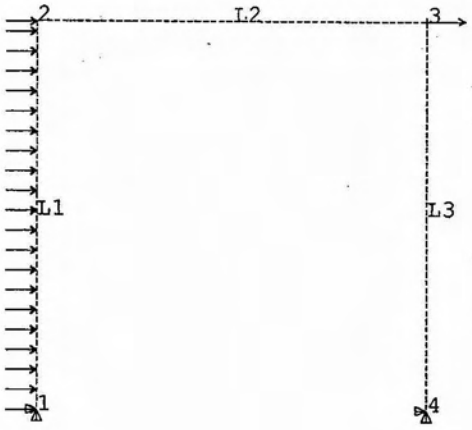
Solution>Define Loads>Apply>Structural>Force/Moment>On Keypoints↑ P: KP3, Apply,
FX = 1000, Apply, P: KP3, OK, MZ = -4000, OK;

14. Vyselektovanie prvkov, na ktoré pôsobí spojité zaťaženie.
Pri čiarových prvkoch sa musí spojité zaťaženie zadávať priamo na prvky – nie je možné, žiaľ, využiť čiaru, na ktorej ležia. Príkaz P: *Raise Hidden* umožňuje obnoviť prekryté okná. Treba kliknuť na ikonu tejto značky; nachádza za koncom okna *Input Window*.

Utility Menu>Select>Entities... Lines, By Num/Pick, Apply↑ P: L1, OK, P: *Raise Hidden*, Elements,
Attached to, Lines, OK;

15. Zadanie spojitého zaťaženia na vyselektované prvky
Main Menu>Solution>Define Loads>Apply>Structural>Pressure> On Beams↑ Pick All:
ValI = 2000, OK;

Zavrieť upozorňovacie žlté okno; v našom prípade nedôjde k prepísaniu žiadnej hodnoty.

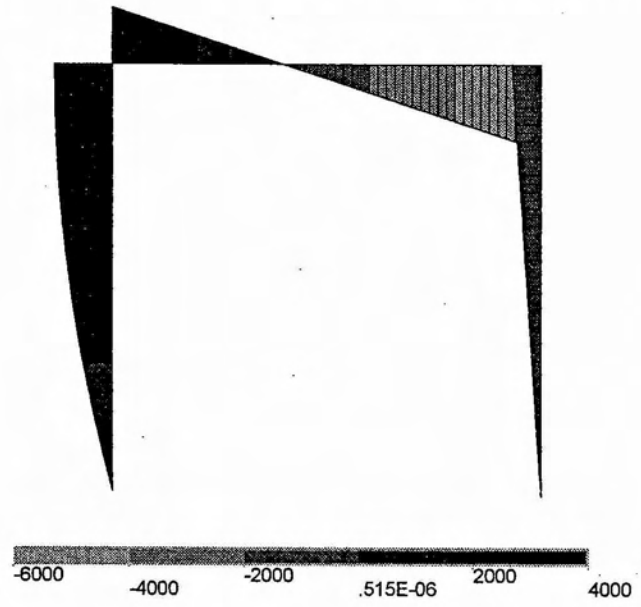


16. Návrat ku kompletnej databáze
Utility Menu>Select>Everything;

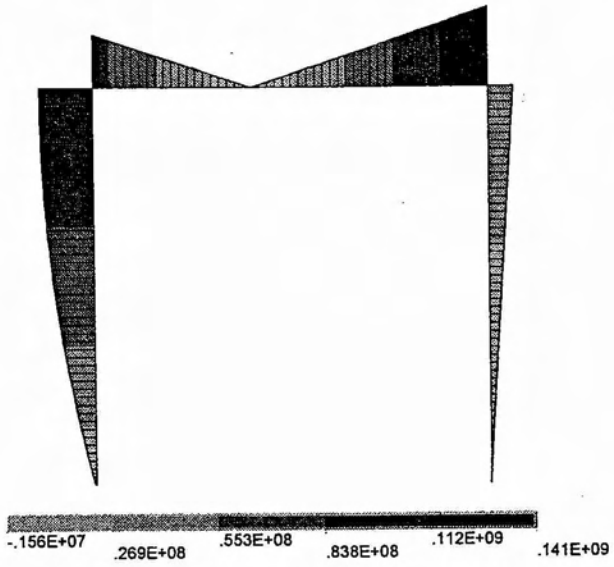
17. Príkaz na vykonanie výpočtu
Solution>Solve>Current LS... Solve Current Load Step, OK;

18. Načítanie hodnôt z výsledkovej databázy. (Načítame ohybový moment a maximálne normálové napätie vo všetkých uzloch *i* a *j*. Pozri v manuáli pre prvok BEAM3 údaje ETABLE)
Main Menu>General Postproc>Element Table>Define Table, Add...
Do okna LAB napíšte: IMOMENT,
Vyznačte v ľavom okne: *By sequence num*;
Napíšte do pravého spodného okna: SMISC,6, Apply, Analogicky:
LAB = JMOMENT, *By sequence num,* SMISC,12, Apply,
LAB = ISMAX, *By sequence num,* NMISC,1, Apply,
LAB = JSMAX, *By sequence num,* NMISC,3, OK, Close;

19. Grafické znázornenie priebehu ohybového momentu
General Postproc>Plot Results>Contour Plot>Line Elem Res... Do okna LABI napíšte (načítajte): IMOMENT, Do okna LABJ napíšte: JMOMENT, OK;



20. Grafické znázornenie priebehu maximálneho normálového napätia (Je to superpozícia napätia od ohybového momentu a osovej sily)
General Postproc>Plot Results>Contour Plot>Line Elem Res... Do okna LABI napíšte (načítajte): ISMAX, Do okna LABJ napíšte: JSMAX, OK;



21. Ukončenie práce s uložením databázy úlohy
Ansys Toolbar>Quit... Save Geom+Loads, OK;

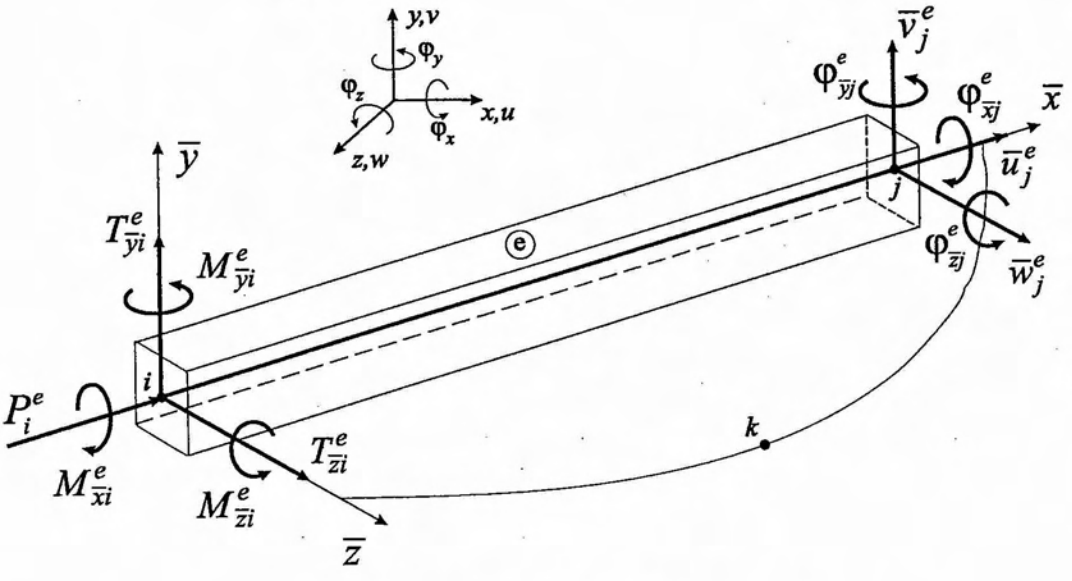
2.6.2.3 Priestorové rámové konštrukcie

Ako sme už uviedli v úvode k rámovým konštrukciám, v myslenom normálovom reze na os zaťaženého *priestorového* nosníka pôsobí šesť výsledníc vnútorných síl, ktorých kladné hodnoty sme pre *e*-ty nosník v reze tesne vedľa uzla *i* usporiadali do vektora vnútorných uzlových síl (obr. 2.12)

$$\overline{\mathbf{q}}_i^e = \left[P_i^e \quad T_{\overline{y}i}^e \quad T_{\overline{z}i}^e \quad M_{\overline{x}i}^e \quad M_{\overline{y}i}^e \quad M_{\overline{z}i}^e \right]^T \tag{2.6.2-26}$$

v poradí: osová sila, dve zložky priečnej sily, krútiaci moment a dve zložky ohybového momentu. Vektor vnútorných uzlových síl prvku potom je

$$\overline{\mathbf{q}}^e = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{q}}_i^e \\ \overline{\mathbf{q}}_j^e \end{bmatrix} \tag{2.6.2-27}$$



Obrázok 2.12 Priestorový nosníkový prvok

Lokálne súradnicové osi $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$ takéhoto prvku sú určené uzlami i a j (os $\bar{x}$) a tvarom prierezu – pokiaľ nezasiahneme do nastavenia, program predpokladá, že osi $\bar{y}$ a $\bar{z}$ sú *hlavné centrálne osi kvadratických momentov* prierezu. Tvoria pravouhlý pravotočivý systém. Zadanie osí $\bar{y}$ a $\bar{z}$ sa robí obyčajne pomocou tretieho pomocného uzla k, ktorý spolu s uzlami i a j udáva napr. v programe ANSYS rovinu $\bar{x},\bar{z}$ a kladný zmysel osi $\bar{z}$ na tú stranu, kde je umiestnený pomocný uzol. Starostlivá kontrola polohy týchto osí je nevyhnutná, pretože k týmto osiam program priradí zadané *hlavné centrálne kvadratické momenty prierezu* $I_{\bar{y}}$ a $I_{\bar{z}}$, ktoré rozhodujúcim spôsobom charakterizujú ohybové vlastnosti prvku.

Lokálnym výsledniciam vnútorných síl prináležia zložky posunutia: $\bar{u},\bar{v},\bar{w}$ – posunutia v smere osí $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$ a $\varphi_{\bar{x}}$, $\varphi_{\bar{y}}$, $\varphi_{\bar{z}}$ - natočenia okolo osí $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$. Vektor posunutia uzlového bodu v lokálnom súradnicovom systéme teda je

$$\bar{\mathbf{a}}_i^e = \left[\bar{u}_i^e \quad \bar{v}_i^e \quad \bar{w}_i^e \quad \varphi_{\bar{x}i}^e \quad \varphi_{\bar{y}i}^e \quad \varphi_{\bar{z}i}^e\right]^T \tag{2.6.2-27}$$

a vektor lokálnych posunutí prvku

$$\bar{\mathbf{a}}^e = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{a}}_i^e \\ \bar{\mathbf{a}}_j^e \end{bmatrix} \tag{2.6.2-28}$$

Vektory prvku v globálnom súradnicovom systéme x, y, z sú $\mathbf{q}^e$ a $\mathbf{a}^e$; ich zložky pre uzol i sú

$$\mathbf{q}_i^e = \left[Q_{xi}^e \quad Q_{yi}^e \quad Q_{zi}^e \quad M_{xi}^e \quad M_{yi}^e \quad M_{zi}^e\right]^T \tag{2.6.2-29}$$

$$\mathbf{a}_i^e = \left[u_i^e \quad v_i^e \quad w_i^e \quad \varphi_{xi}^e \quad \varphi_{yi}^e \quad \varphi_{zi}^e\right]^T \tag{2.6.2-30}$$

a analogicky ich označujeme aj pre uzol j. Prvok má teda v lokálnom i globálnom systéme 12 stupňov voľnosti.

V lokálnom systéme medzi posunutiami uzlových bodov prvku a uzlovými silami platí všeobecný vzťah (2.4-5)

$$\bar{\mathbf{q}}^e = \bar{\mathbf{K}}^e \bar{\mathbf{a}}^e - \bar{\mathbf{f}}^e \tag{2.6.2-31}$$

kde štvorcová matica $\bar{\mathbf{K}}^e$ stupňa 12 je lokálna matica tuhosti priestorového nosníkového prvku.

Odvodenie lokálnej matice tuhosti vzhľadom na poznatky z rovinného nosníka je už teraz jednoduché; závislosť medzi koncovými posunutiami prvku a koncovými silami môžeme vyjadriť superpozíciou osového, ohybového a krútiaceho zaťaženia. Tieto vzťahy už poznáme pre osové zaťaženie i pre ohyb okolo osi (principiálne sa ohyb okolo osi $\bar{z}$ a $\bar{y}$ riadi rovnakými vzťahmi, len treba zobrať príslušný kvadratický moment plochy), pribudlo namáhanie nosníka na krútenie. Prvok má 12 stupňov voľnosti, takže v aproximačných polynómoch môžeme mať 12 koeficientov. Dva sa spotrebujú na osové zaťaženie a po štyri na ohyb okolo dvoch osí. Takže na krútenie máme k dispozícii lineárny polynom, tak ako na ťah/tlak prvku, a aj závislosť koncových hodnôt silových a posuvových veličín krútenia je analogická s (1.3- 1)

$$\begin{bmatrix} M^e_{\bar{x}i} \\ M^e_{\bar{x}j} \end{bmatrix} = \frac{G_e I^e_k}{L_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi^e_{\bar{x}i} \\ \varphi^e_{\bar{x}i} \end{bmatrix} \qquad (2.6.2-32)$$

len tuhosť prvku v ťahu vystriedala tuhosť v krútení $G_e I^e_k / L_e$, kde G_e je modul pružnosti v šmyku materiálu prvku a I^e_k je moment tuhosti prierezu prvku v krútení. Partnerom krútiaceho momentu je rotačný stupeň voľnosti – uhol skrútenia prvku okolo osi $\bar{x}$.

Keď teraz poskladáme dielčie tuhosti a zohľadníme správne znamienko pri ohybe v rovine $(\bar{z}, \bar{x})$ dostaneme lokálnu maticu tuhosti priestorového nosníkového prvku (33).

$$\bar{\mathbf{K}}^e = \begin{bmatrix}
\frac{E_e S_e}{L_e} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{E_e S_e}{L_e} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & \frac{12E_e I^e_{\bar{z}}}{L_e^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6E_e I^e_{\bar{z}}}{L_e^2} & 0 & -\frac{12E_e I^e_{\bar{z}}}{L_e^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6E_e I^e_{\bar{z}}}{L_e^2} \\
 & & \frac{12E_e I^e_{\bar{y}}}{L_e^3} & 0 & -\frac{6E_e I^e_{\bar{y}}}{L_e^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12E_e I^e_{\bar{y}}}{L_e^3} & 0 & \frac{6E_e I^e_{\bar{y}}}{L_e^2} & 0 \\
 & & & \frac{G_e I^e_k}{L_e} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{G_e I^e_k}{L_e} & 0 & 0 \\
 & & & & \frac{4E_e I^e_{\bar{y}}}{L_e} & 0 & 0 & 0 & \frac{6E_e I^e_{\bar{y}}}{L_e^2} & 0 & \frac{2E_e I^e_{\bar{y}}}{L_e} & 0 \\
 & & & & & \frac{4E_e I^e_{\bar{z}}}{L_e} & 0 & -\frac{6E_e I^e_{\bar{z}}}{L_e^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2E_e I^e_{\bar{z}}}{L_e} \\
 & & & & & & \frac{E_e S_e}{L_e} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & SYM & & & & & \frac{12E_e I^e_{\bar{z}}}{L_e^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6E_e I^e_{\bar{z}}}{L_e^2} \\
 & & & & & & & & \frac{12E_e I^e_{\bar{y}}}{L_e^3} & 0 & \frac{6E_e I^e_{\bar{y}}}{L_e^2} & 0 \\
 & & & & & & & & & \frac{G_e I^e_k}{L_e} & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & \frac{4E_e I^e_{\bar{y}}}{L_e} & 0 \\
 & & & & & & & & & & & \frac{4E_e I^e_{\bar{z}}}{L_e}
\end{bmatrix} \qquad (2.6.2-33)$$

Transformačná matica sa tvorí obdobne ako u priestorového prútového prvku, jej základom je matica, ktorá transformuje vektor z globálneho súradnicového systéme do lokálneho systému prvku, kde ale vektor má už teraz, na rozdiel od prútového prvku, nie jednu, ale tri zložky a transformačná matica vektora obsahuje smerové kosínusy troch osí

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} l_{\bar{x}x} & m_{\bar{x}y} & n_{\bar{x}z} \\ l_{\bar{y}x} & m_{\bar{y}y} & n_{\bar{y}z} \\ l_{\bar{z}x} & m_{\bar{z}y} & n_{\bar{z}z} \end{bmatrix}$$

V matici prvý riadok obsahuje smerové kosínusy osi $\overline{x}$, druhý riadok osi $\overline{y}$ a tretí riadok osi $\overline{z}$ ku globálnym osiam x, y, z. Smerové kosínusy možno opäť ako u prútového prvku určiť z globálnych súradníc uzlových bodov, pravda, je to už, najmä pre osi $\overline{y}$ a $\overline{z}$, o niečo zložitejšia úloha. Transformácia globálnych uzlových hodnôt na lokálne sa potom uskutočňuje pomocou transformačnej matice prvku

$$\mathbf{T}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T} \end{bmatrix} \qquad (2.6.2\text{-}34)$$

kde **0** je nulová matica 3x3.

Pre globálnu maticu prvku využijeme známy vzťah $\mathbf{K}^e = \mathbf{T}_e^T \overline{\mathbf{K}}^e \mathbf{T}_e$ a vektory vonkajších uzlových síl od spojitého prvkového zaťaženia určujeme rovnako ako u rovinného nosníka. Pomocou známej matice $\mathbf{T}_e$ podobne ako pri rovinnom prvku môžeme globálne vektory prvku transformovať do lokálneho súradnicového systému

$$\overline{\mathbf{q}}^e = \mathbf{T}_e \mathbf{q}^e$$
$$\overline{\mathbf{a}}^e = \mathbf{T}_e \mathbf{a}^e$$
$$\overline{\mathbf{f}}^e = \mathbf{T}_e \mathbf{f}^e$$

alebo naopak, pomocou inverzných vzťahov.

Výslednú maticu tuhosti rámu dostaneme pomocou kódových čísel prvkov ako súčet rozšírených matíc tuhosti prvkov podľa (2.5- 5)

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{NET} \underline{\mathbf{K}}^e$$

a výsledný vektor zaťaženia podľa (2.5- 6)

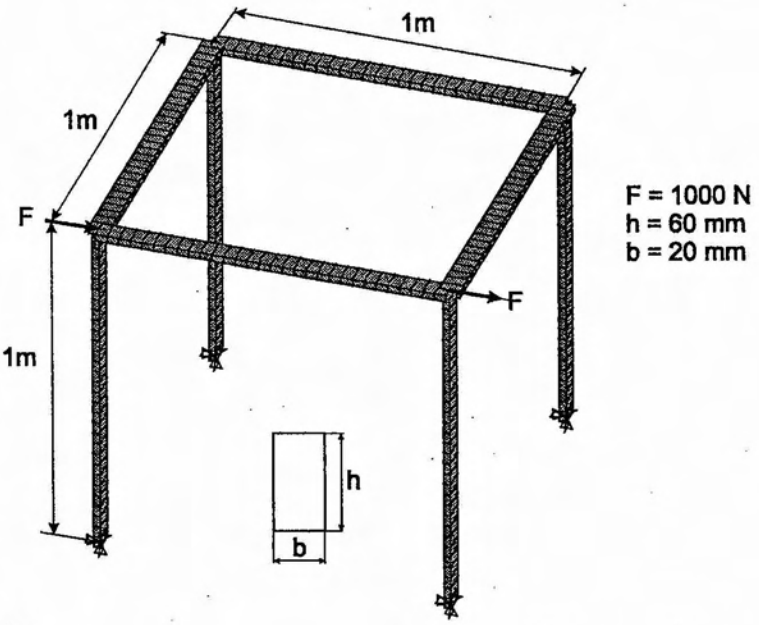
$$\mathbf{f} = \sum_{e=1}^{NET} \underline{\mathbf{f}}^e + \mathbf{f}_F$$

Do výslednej sústavy rovníc $\mathbf{Ka} = \mathbf{f}$ zavedieme okrajové podmienky a program nám vypočíta primárne neznáme – posunutia/natočenia voľných uzlov. Vo vektore **a** takto už poznáme všetky zložky; sú to zložky posunutia a natočenia prvkov konštrukcie vo voľných uzloch i v uzloch s predpísanými posunutiami/natočeniami. Tieto hodnoty sú uložené vo výsledkovej databáze, možno ich vypísať a graficky znázorniť v primeranom zväčšení. Dostávame tak číselnú i názornú informáciu o deformácii rámu.

Program v cykle cez všetky prvky konštrukcie zo vzťahov $\mathbf{q}^e = \mathbf{K}^e \mathbf{a}^e - \mathbf{f}^e$ a $\overline{\mathbf{q}}^e = \mathbf{T}_e \mathbf{q}^e$ vypočíta osovú silu, zložky priečnej sily, zložky ohybového momentu a krútiaci moment pre každý prvok rámu v oboch jeho uzloch i niektoré napäťové hodnoty prvku. Tieto veličiny si možeme z výsledkovej databázy vypísať, resp. graficky znázorniť.

Príklad 2.5

Pre priestorový rám zadaný na obrázku určte miesto a veľkosť najväčšieho normálového napätia a maximálnu veľkosť krútiaceho momentu a priečnej sily.



1. Zadanie názvu úlohy
Utility Menu>File>Change Jobname... /FILNAM = Ram 3D, OK;

2. Zadanie typu prvku pre úlohu
Main Menu>Preprocessor>Element Type>Add/Edit/Delete, Add... Beam 3D Elastic 4, OK, Close;

3. Zavedenie parametrov pre rozmery prierezu prvku (gama je koeficient tuhosti zadaného prierezu v krútení)
Input Window: h = 0.06, *Enter*,
b = 0.02, *Enter*,
gama = 0.263, *Enter*;

4. Kontrola zadaných parametrov
Utility Menu>Parameters>Scalar Parameters, Close;

5. Prierezové údaje
Preprocessor>Real Constants>Add/Edit/Delete, Add... (Typ 1 BEAM4) OK, AREA = h*b,
IZZ = 1/12*b*h**3, IYY = 1/12*h*b**3, TKZ = b, TKY = h, IXX = gama*h*b**3,
OK, Close;

6. Materiálové údaje
Preprocessor>Material Props>Material Models, Structural, Linear, Elastic, Isotropic... EX = 2.1e11,
PRXY = 0.3, OK, Material, Exit;

7. Zapnutie trvalého číslovania entít kvôli kontrole
Utility Menu>PlotCtrls>Numbering... KP = ON, LINE = ON, OK;

8. Zapnutie priestorového pohľadu na úlohu
Utility Menu>PlotCtrls>Pan Zoom Rotate... Obliq;

9. Vytvorenie štyroch spodných bodov modelu (číslovanie je automatické)
Preprocessor>Modeling>Create>Keypoints>In Active CS... X = 0, Y = 0, Z = 0, Apply,
X = 0, Y = 0, Z = 1, Apply,
X = 1, Y = 0, Z = 1, Apply,
X = 1, Y = 0, Z = 0, OK;

10. Vytvorenie štyroch horných bodov modelu kopírovaním
Preprocessor>Modeling>Copy>Keypoints↑ Pick All... DY = 1, OK;

9. Vytvorenie čiar modelu
Preprocessor>Modeling>Create>Lines>Lines>Straight Line↑ P: KP6, P: KP7,
P: KP7, P: KP8,
P: KP8, P: KP5,
P: KP5, P: KP6,
P: KP1, P: KP5,
P: KP2, P: KP6,
P: KP3, P: KP7,
P: KP4, P: KP8, OK;

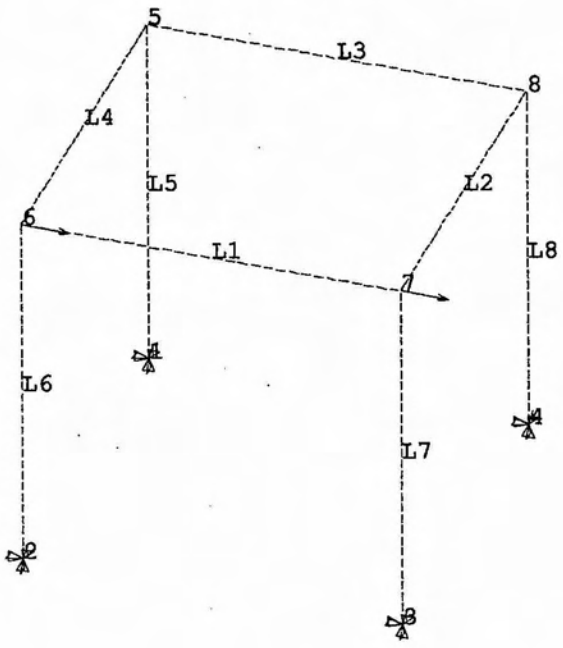
10. Tvorba prvkov.
Volíme hustotu 30 prvkov na čiare. Hustota týchto prvkov nemá vplyv na presnosť riešenia, ale umožní nám kvalitné grafické znázornenie priebehu vypočítaných veličín po čiarach nosníkov.

Preprocessor>Meshing>Mesh Tool... Size Controls: Global Set: Ndiv = 30, OK, Mesh, Pick All;

11. Návrat k očíslovaným bodom a čiaram
Utility Menu>Plot>Lines;

12. Upevnenie modelu
Main Menu>Solution>Define Loads>Apply>Structural>Displacement> On Keypoints↑ P: KP1,
P: KP2, P: KP3, P: KP4, OK, Vyznačiť UX, UY, UZ, OK;

13. Zadanie síl do bodov 6 a 7
Solution>Define Loads>Apply>Structural>Force/Moment>On Keypoints↑ P: KP6, P: KP7, OK,
FX = 1000, OK;



14. Zapnutie zobrazenia šírky a výšky prierezov
Utility Menu>PlotCtrls>Style>Size and Shape... /ESHAPE = ON, SCALE = 1, OK;

15. Zobrazenie prvkov v polohe, do ktorej ich umiestnil program
Utility Menu>Plot>Elements;

16. Otočenie prvkov o 90°. (Pretože sme kvôli jednoduchosti postupu nezadali pre prvky tretí pomocný uzol, ktorý definuje polohu roviny $\overline{x}, \overline{z}$ v priestore, program umiestnil prvky podľa zásad, ktoré sú vysvetlené v prvkovom manuáli. V našom prípade, zhodou okolností, netreba selektovať nesprávne natočené prvky, pretože všetky prvky treba otočiť o 90°, čo sa vykoná nasledujúcim príkazom. V prípade, že by len na niektorej čiare bolo treba otočiť prvky o nejaký uhol, treba na tejto čiare vyselektovať prvky a postupovať rovnakým spôsobom. Program mení uhol α len pre vyselektované prvky. Potom je potrebné vrátiť sa k celej databáze a skontrolovať natočenie prvkov.)

Preprocessor>Real Constants>Add/Edit/Delete: Edit... (Type 1 BEAM4), OK, THETA = 90, OK, Close;

17. Kontrola novej polohy prvkov

Utility Menu>Plot>Elements;

18. Príkaz na vykonanie výpočtu

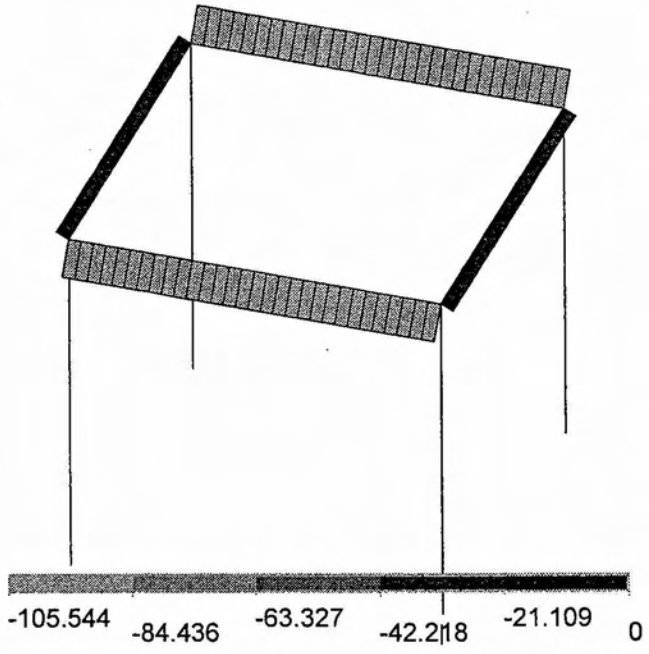
Solution>Solve>Current LS... Solve Current Load Step, OK;

19. Načítanie hodnôt z výsledkovej databázy. (Načítame krútiaci moment a maximálne normálové napätie vo všetkých uzloch *i* a *j*. Pozri v manuáli pre prvok BEAM4 údaje ETABLE)

Main Menu>General Postproc>Element Table>Define Table, Add... Do okna LAB napíšte: IMOMENT, Vyznačte v ľavom okne: *By sequence num*; Napíšte do pravého spodného okna: SMISC,4, Apply, Analogicky:
LAB = JMOMENT, *By sequence num,* SMISC,10, Apply,
LAB = ISMAX, *By sequence num,* NMISC,1, Apply,
LAB = JSMAX, *By sequence num,* NMISC,3, OK, Close;

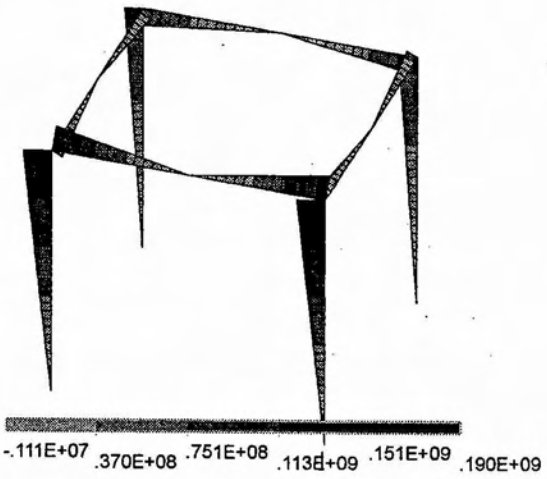
20. Grafické znázornenie priebehu krútiaceho momentu

General Postproc>Plot Results>Contour Plot>Line Elem Res... Do okna LABI načítajte: IMOMENT, Do okna LABJ: JMOMENT, OK;



21. Grafické znázornenie priebehu maximálneho normálového napätia (Je to superpozícia napätia od ohybového momentu a osovej sily)

General Postproc>Plot Results>Contour Plot>Line Elem Res... Do okna LABI načítajte: ISMAX, Do okna LABJ: JSMAX, OK;



22. Ukončenie práce s uložením databázy úlohy
Ansys Toolbar>Quit... Save Geom+Loads, OK;

Klasické nosníkové prvky budované na uvedenej teórii (v programe ANSYS je to rovinný prvok BEAM 2D Elastic 3 a priestorový prvok BEAM 3D Elastic 4) umožňujú výpočet výsledníc vnútorných síl, pre kompletnú napäťovú kontrolu však nemajú dostatok údajov o priečnom reze nosníka. Z osovej sily a plochy priečneho rezu program je schopný vypočítať osové napätie a zložiť ho v krajných vláknach prierezu s ohybovým napätím (keď zadáme šírku a výšku prierezu), čím sa určí maximálne normálové napätie. Pravda, táto hodnota je správna len pre prierezy, kedy *obe* hlavné centrálne osi prierezu sú totožné s osami symetrie prierezu (kruh, obdĺžnik, *I*-profil a pod.). Pri iných prierezoch (*C, L ,U, Z* profily a i.) treba vychádzať z výsledníc vnútorných síl a napätia v najviac namáhaných miestach skladať podľa zásad kombinovaného namáhania prierezu. Pre všetky tvary prierezov to platí v prípade šmykových napätí, o ktorých prvok neposkytuje žiadne údaje (nemá údaje o *tvare* prierezu). Tieto prvky navyše nezohľadňujú krútenie od síl, ktorých výslednice nepôsobia v stredisku šmyku, ani stiesnené krútenie.

Na napäťovú analýzu nosníkových konštrukcií sú lepšie uspôsobené prvky so zadaným tvarom prierezu a s výpočtom napätí aj mimo krajných vlákien založené na Timoshenkovej teórii nosníka (napr. [9], [4]). Pri týchto prvkoch sa robí diskretizácia prvku aj po priereze. V mieste uzlov sa prierez rozdelí na rovinné podoblasti (*Sections*), na ktorých sú definované integračné body pre vyčíslenie prierezových veličín. V programe ANSYS základným prvkom tohoto typu je prvok Beam 188. Obraz o spôsobe využitia takýchto prvkov poskytne nasledujúci príklad.

Príklad 2.6

Pre priestorový rám z príkladu 2.5 určite veľkosť a rozdelenie osového normálového napätia a šmykového napätia od krútiaceho momentu.

1. Zadanie názvu úlohy
Utility Menu>File>Change Jobname... /FILNAM = Ram 3D Sections, OK;

2. Zadanie typu prvku pre úlohu
Main Menu>Preprocessor>Element Type>Add/Edit/Delete, Add... Beam 2 node 188, OK, Close;

3. Materiálové údaje
Preprocessor>Material Props>Material Models, Structural, Linear, Elastic, Isotropic... EX = 2.1e11, PRXY = 0.3, OK, Material, Exit;

4. Zadanie tvaru a rozmerov prierezu
Preprocessor>Sections>Beam>Common Sectns... Sub-Type = ■ , B = 0.02, H = 0.06, OK;

5. Kontrolné zobrazenie prierezu
Preprocessor>Sections>Beam>Plot Section, OK;

6. Zapnutie trvalého číslovania entít kvôli kontrole
*Utility Menu>PlotCtrls>Numbering...*KP = ON, LINE = ON, OK;

7. Zapnutie priestorového pohľadu na úlohu
Utility Menu>PlotCtrls>Pan Zoom Rotate... Obliq;

8. Vytvorenie štyroch spodných bodov modelu (číslovanie je automatické)
Preprocessor>Modeling>Create>Keypoints>In Active CS... X = 0, Y = 0, Z = 0, Apply,
X = 0, Y = 0, Z = 1, Apply,
X = 1, Y = 0, Z = 1, Apply,
X = 1, Y = 0, Z = 0, OK;

9. Vytvorenie štyroch horných bodov modelu kopírovaním
Preprocessor>Modeling>Copy>Keypoints... Pick All... DY = 1, OK;

10. Vytvorenie čiar modelu
Preprocessor>Modeling>Create>Lines>Lines>Straight Line↑ P: KP6, P: KP7,
P: KP7, P: KP8,
P: KP8, P: KP5,
P: KP5, P: KP6,
P: KP1, P: KP5,
P: KP2, P: KP6,
P: KP3, P: KP7,
P: KP4, P: KP8, OK;

11. Vytvorenie pomocných bodov pre zadanie polohy prierezov prvkov na čiare. (Veľká vzdialenosť bodov – dostatočná na zaručenie "inžinierskej" rovnobežnosti priamok - zníži počet potrebných bodov.)
Preprocessor>Modeling>Create>Keypoints>In Active CS... X = 10000, Y = 0, Z = 0, Apply,
X = 0, Y = 0, Z = 10000, OK;

12. Návrat k čiaram
Utility Menu>Plot>Lines;

13. Uloženie databázy úlohy pred zložitým reťazcom príkazov.(V prípade chyby je potom možný jednoduchý návrat k súčasnému stavu pomocou príkazu *ANSYS Toolbar, RESUM_DB*.)
ANSYS Toolbar, SAVE_DB

14. Vytvorenie prvkov v správnej polohe
Preprocessor>Meshing>Mesh Tool... Size Controls: Global Set: Ndiv = 30, OK,
Element Attributes: Lines, Set↑ P: L2, P: L4, Apply: Pick Orientation KP, Yes, Apply,
Utility Menu>Plot>Keypoints>Keypoints↑ P: KP9, Apply,
Utility Menu>Plot>Lines↑ P: L1, P: L3, P: L5, P: L6, P: L7, P: L8, OK,
Line Attributs: OK,
Utility Menu>Plot>Keypoints>Keypoints↑ P: KP10, OK,
Preprocessor>Meshing>Mesh Tool... Mesh, Pick All;

15. Nakreslenie prvkov i s tvarom prierezu
Utility Menu>PlotCtrls>Style>Size and Shape... /ESHAPE=ON, SCALE = 1, OK;
(Utility Menu>Plot>Elements;)

16. Vylepšenie prekrytia čiar (v prípade potreby)
Utility Menu>PlotCtrls>Style>Hidden Line Options... /TYPE = Precise hidden, OK;

17. Návrat k čiaram
Utility Menu>Plot>Lines;

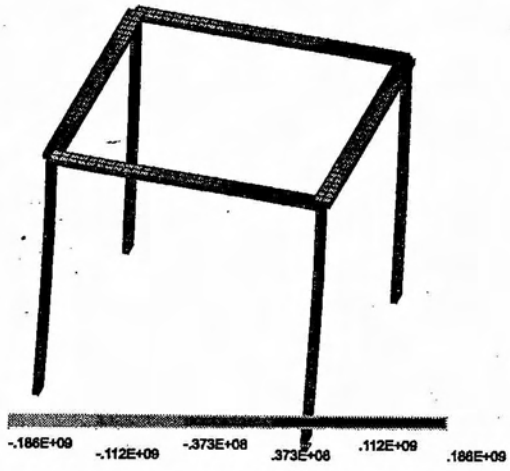
18. Upevnenie modelu
Main Menu>Solution>Define Loads>Apply>Structural>Displacement> On Keypoints↑ P: KP1, P: KP2, P: KP3, P: KP4, OK, Vyznačiť UX, UY, UZ, OK;

19. Zadanie síl do bodov 6 a 7
Solution>Define Loads>Apply>Structural>Force/Moment>On Keypoints↑ P: KP6, P: KP7, OK, FX = 1000, OK;

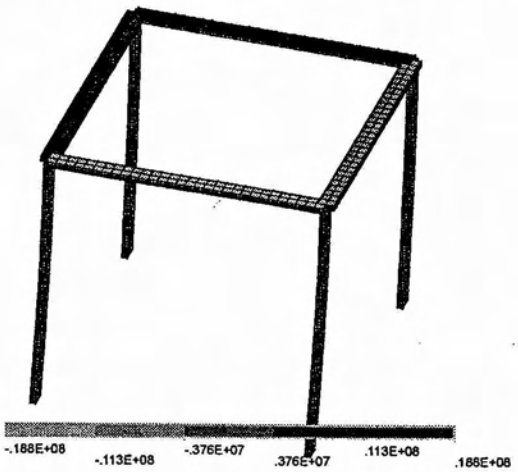
20. Návrat k prvkom
Utility Menu>Plot>Elements;

21. Príkaz na vykonanie výpočtu
Solution>Solve>Current LS... Solve Current Load Step, OK;

22. Grafické znázornenie priebehu osového napätia
General Postproc>Plot Results>Contour Plot>Nodal Solu... Stress, X-direction SX, OK;



23. Priebeh šmykového napätia od krútiaceho momentu
General Postproc>Plot Results>Contour Plot>Nodal Solu... Stress, XY-shear SXY, OK;



24. Ukončenie práce s uložením databázy úlohy
Ansys Toolbar>Quit... Save Geom+Loads, OK;

Poznámka k príkladu 2.6

- Pri použití prvku Beam 188 sa tretí uzol pre prvky na čiare (čiarach) zadáva hromadne pomocou bodu, ktorý pre čiaru (čiary) udáva lokálnu rovinu $\overline{x},\overline{z}$ daného prierezu. Takýmto spôsobom môžeme napr. na vodorovnej čiare postaviť obdĺžnikový prierez prvkov nastojato, naležato alebo šikmo podľa potreby. Pravda, pri priereze, ktorý nemá dve osi symetrie, napr. C alebo L prierez, jeho jednoznačnú polohu určuje aj zmysel čiary, na ktorej je umiestnený. Napr. ak na nejakej vodorovnej čiare je C profil umiestnený otvorenou stranou prierezu smerom hore, na rovnobežnej vodorovnej čiare s opačným zmyslom bude umiestnený otvorenou stranou smerom dole. Zmysel čiar je určovaný pri ich tvorbe poradím zadania (kliknutia) ich koncových bodov a pre správne umiestnenie profilov uvedeného typu možno na to myslieť už pri tvorbe čiar a zadávaní pomocných orientačných bodov. Užívateľ s menšou praxou však na to nemusí prihliadať, pretože zmysel čiar, kde poloha prierezu nevyhovuje, sa dá jednoducho zmeniť príkazom *Preprocessor>Modeling>Move/Modify>Reverse Normals>of Lines*, čím sa automaticky prvky otočia o 180°.

Znázornenie zmyslu čiar sa dosiahne príkazmi
Utility Menu>PlotCtrls>Symbols... LDIR = ON;
Utility Menu>Plot>Lines;

Pre zujímavosť uvádzame, že pomocou príkazu *LATT* (pozri zoznam príkazov cez *Help* v manuáli) možno pre čiaru pred delením na prvky zadať *dva* orientačné body (začiatočný a koncový) a modelovať takto skrútené nosníky. Napr. na čiare *L1* môžeme plynule natočiť nosník (jeho prvky) o 90° príkazom

Input Window: LATT,1, ,1, ,5,3,1,Enter; (pozri obrázok).



2.6.3 Dvojrozmerné úlohy

Významným zjednodušením pevnostnej úlohy pre spojité teleso je prípad, keď pri jej riešení vystačíme s dvomi nezávislými premennými x a y. V takom prípade, ako sme už uviedli, modelujeme z telesa len jeho rovinnú stredovú, resp. tvoriacu plochu a na riešenie úlohy využívame rovinné plošné prvky (obr. 2.2b).

Do tejto kategórie patria telesá namáhané rovinnou napätosťou, rovinnou deformáciou a rotačne symetrické telesá. Teória pevnostného riešenia (geometrické a fyzikálne rovnice)

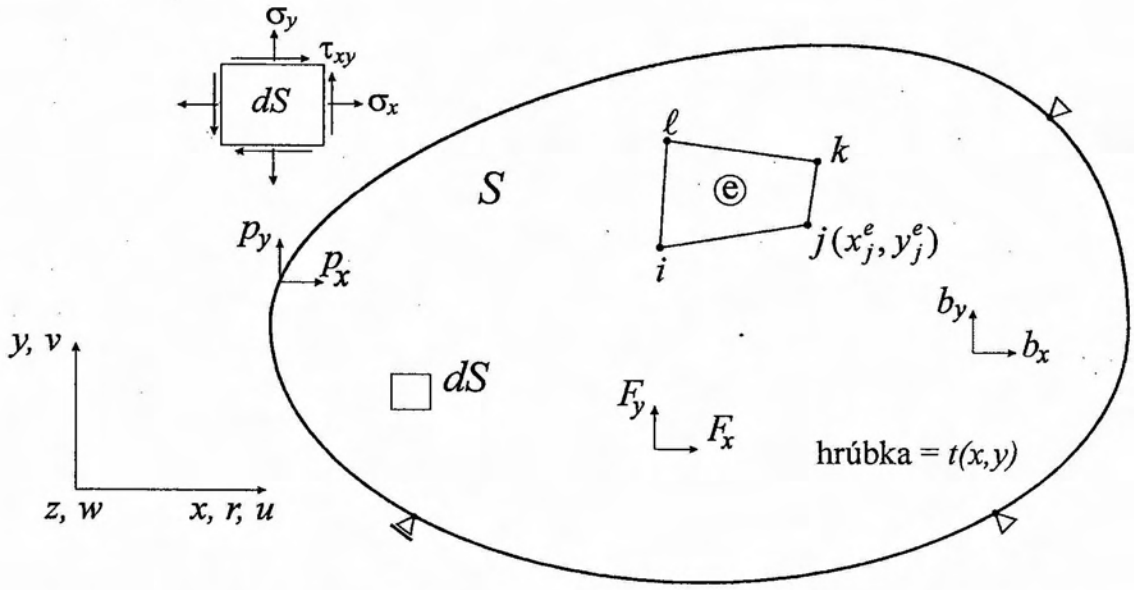
týchto troch úloh i algoritmus ich programového spracovania sa tak málo od seba líšia, že sa v programoch MKP pre tieto úlohy využíva obyčajne ten istý prvok; pri výpočtárskom použití sa prepne na zvolenú úlohu.

A) Rovinná napätosť

Uvažujme najprv zaťažené teleso v rovnovážnom stave, ktoré má v rovine (x,y) rovinnú plochu symetrie (stredovú plochu) S (obr. 2.13). Všetky vonkajšie zaťaženia (vrátane reakcií) nech sú symetricky rozdelené po hrúbke telesa $t(x,y)$; ich výslednice teda pôsobia v rovine S a spojité zaťaženia $\mathbf{p}(x,y)$ a $\mathbf{b}(x,y)$ sú na premennej z nezávislé. Za týchto predpokladov stačí pre riešenie pevnostnej úlohy telesa určiť len funkcie posunutia stredovej plochy telesa

$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix} \tag{2.6.3- 1}$$

pretože, ako ukážeme, všetky deformačné i napäťové veličiny telesa možno z týchto funkcií vypočítať.



Obrázok 2.13 Stredová (tvoriaca) plocha dvojrozmerných úloh

Vo vektore napätia (2.1- 4) sú nenulové len zložky, ktoré ležia v rovine (x,y)

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \tau_{xy} \end{bmatrix}^T \tag{2.6.3- 2}$$

a preto hovoríme, že teleso (stena, membrána) je zaťažená rovinnou napätosťou. Vektor pomernej deformácie má však štyri nenulové zložky (materiál reaguje na rovinnú napätosť priečnou deformáciou)

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z & \gamma_{xy} \end{bmatrix}^T \tag{2.6.3- 3}$$

Teraz už môžeme využiť postup podrobne uvedený v časti 2.1 pre všeobecné priestorové teleso, kde zavedieme pre tento prípad platné zjednodušenia:

$$\sigma_z=\tau_{yz}=\tau_{zx}=\gamma_{yz}=\gamma_{zx}=0 \tag{2.6.3- 4}$$

Pomerné deformácie v rovine (x,y) potom podľa (2.1-5) sú

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.6.3- 5}$$

Z fyzikálnych rovníc (2.1-6) dostávame

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \mu\sigma_y\right), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(-\mu\sigma_x + \sigma_y\right), \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \tag{2.6.3- 6}$$

a z podmienky $\sigma_z = 0$

$$\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) \tag{2.6.3- 7}$$

Invertovaním rovníc (6) dostaneme vzťahy pre výpočet napätí

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y\right), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\mu\varepsilon_x + \varepsilon_y\right), \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \tag{2.6.3- 8}$$

Pomernú deformáciu v smere osi z je teraz už možné vyjadriť aj pomocou pretvorení v rovine (x,y), keď z (8) dosadíme do (7): $\varepsilon_z = -\frac{\mu}{1-\mu}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right)$.

V maticovom tvare pre napätie platí $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$, kde v tomto prípade je

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \tau_{xy} \end{bmatrix}^T, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \gamma_{xy} \end{bmatrix}^T$$

a matica materiálových konštánt (2.1-8) sa zredukovala na

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\mu^2}\begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu)/2 \end{bmatrix} \tag{2.6.3- 9}$$

B) ***Rovinná deformácia***

Predpoklad rovinnej deformácie môžeme použiť pri telesách, ktoré sú dlhé a ktorých tvar (prierez) a zaťaženie sa nemení v pozdĺžnom smere (napr. dlhá rúra alebo tyč s nepravidelným prierezom, priehradový múr a pod.). Ak pozdĺžny smer stotožníme s osou z a ďaleko od koncov telesa dvomi rovnobežnými normálovými rezmi vyrežeme časť telesa *s jednotkovou hrúbkou*, dostaneme situáciu podobnú tej, ktorú sme rozoberali pri rovinnej napätosti. Obrázok 2.13 opäť predstavuje stredovú plochu S takéhoto výrezu, v nulových veličinách nám oproti rovinnej napätosti pribudlo nulové posunutie a nulová pomerná deformácia v smere osi z

$$w = \varepsilon_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = \gamma_{yz} = \gamma_{yz} = 0 \tag{2.6.3- 10}$$

pravda, napätie σ_z sa už nerovná nule. Z podmienky $\varepsilon_z = 0$ a vzťahu pre túto deformáciu v (2.1- 6) dostávame

$$\sigma_z = \mu\left(\sigma_x + \sigma_y\right) \qquad (2.6.3\text{- }11)$$

Deformácie ε_x a ε_y dostaneme dosadením (11) do prvých dvoch vzťahov (2.1-6), pričom vzťah pre γ_{xy} sa nemení. Invertovaním týchto vzťahov vyjadríme zložky napätí v rovine (x,y)

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1-\mu & \mu & 0 \\ \mu & 1-\mu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\mu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \qquad (2.6.3\text{- }12)$$

C) ***Rotačne symetrické teleso***

Predpokladajme teraz, že rovina S v obr. 2.12 predstavuje plochu, ktorej rotáciou okolo osi y vznikne rotačne symetrické teleso. Nech je teleso zaťažené rovnovážnou sústavou síl, v ktorej všetky sily sú tiež symetrické k tejto osi. Pevnostnú úlohu pre takéto teleso je potom najvýhodnejšie riešiť v cylindrických súradniciach, kde prvá súradná os je radiálna os r , totožná s osou x, druhá je os rotácie y a tretiu (uhol ϑ okolo osi y) nemusíme uvažovať, pretože všetky rezové roviny obsahujúce os rotácie sú rovnocenné. Inými slovami povedané, v každej takejto rezovej rovine sa stretávame s rovnakými vstupnými i výsledkovými parametrami úlohy. Z uvedeného vyplýva, že pevnostná úloha pre rotačne symetrické teleso v cylindrickom súradnicovom systéme patrí do kategórie dvojrozmerných úloh.

Vektor posunutí všeobecného bodu (r,y) rezovej roviny S je

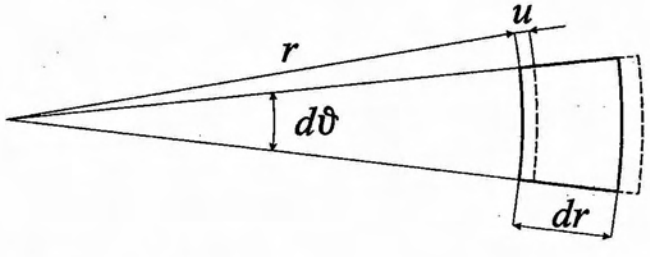
$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u(r,y) \\ v(r,y) \end{bmatrix} \qquad (2.6.3\text{- }13)$$

Posunutie bodov v smere osi z (tangenciálnom, obvodovom) sa rovná nule. Pomerné deformácie

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_\vartheta = \frac{u}{r} \quad \gamma_{ry} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial r} \quad \gamma_{y\vartheta} = 0 \quad \gamma_{\vartheta r} = 0 \qquad (2.6.3\text{- }14)$$

ako vidieť, sú podobné ako pri rovinnej napätosti, pravda ε_ϑ nie je vyvolané priečnym zúžením (alebo rozšírením), ako ε_z pri rovinnej napätosti, ale je dôsledkom radiálnych posunutí (pozri obr. 2.14)

$$\varepsilon_\vartheta = \frac{(r+u)d\vartheta - rd\vartheta}{rd\vartheta} = \frac{u}{r} \qquad (2.6.3\text{- }15)$$



Obrázok 2.14

Fyzikálne rovnice podľa (2.1- 6) sú

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}\left(\sigma_r - \mu\sigma_y - \mu\sigma_\vartheta\right) \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(-\mu\sigma_r + \sigma_y - \mu\sigma_\vartheta\right)$$
$$\varepsilon_\vartheta = \frac{1}{E}\left(-\mu\sigma_r - \mu\sigma_y + \sigma_\vartheta\right) \quad \gamma_{ry} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{ry} = \frac{\tau_{ry}}{G} \qquad (2.6.3\text{- }16)$$

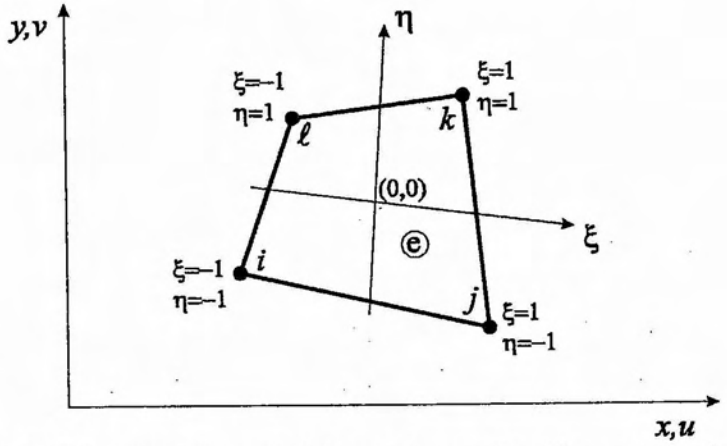
Z týchto rovníc vyjadríme zložky napätia a rovnice zapíšeme v maticovom tvare

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_y \\ \sigma_\vartheta \\ \tau_{ry} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} (1-\mu) & \mu & \mu & \\ \mu & (1-\mu) & \mu & \\ \mu & \mu & (1-\mu) & \\ & & & (1-2\mu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_\vartheta \\ \gamma_{ry} \end{bmatrix} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \qquad (2.6.3\text{- }17)$$

Pripravili sme takto všetky vzťahy pre vytvorenie matíc konečných prvkov rovinnej napätosti, rovinnej deformácie a rotačne symetrického telesa. Vzťahy, z ktorých sa tvoria základné matice prvkov pre uvedené úlohy, sú také podobné, že, ako sme už uviedli, v programoch MKP sa obyčajne pre tento cieľ využíva ten istý prvok.

2.6.3.1 Matice bilineárneho izoparametrického prvku

Predpokladajme, že plocha S v obr. 2.12 je stredová plocha telesa zaťaženého rovinnou napätosťou a že sme ju rozdelili na štvoruholníkové štvoruzlové rovinné prvky, z ktorých ľubovoľný (e-ty) prvok je znázornený na obr. 2.14.



Obrázok 2.15 Rovinný štvoruholníkový štvoruzlový izoparametrický prvok

Zvoľme na prvku dvojrozmerný lokálny súradnicový systém prirodzených súradnic ξ a η tak, aby na hrane prvku bola jedna súradnica konštantná, rovná jednej, resp. mínus jednej, a druhá nech sa po hrane prvku lineárne mení od –1 po +1, ako pri jednorozmernej úlohe v časti 2.6.1.2. Interpolačné funkcie takéhoto bilineárneho prvku sa potom dajú určiť priamo z ich základných vlastností (vo svojom uzle nadobúdajú hodnotu 1 a v ostatných 0)

$$N_i(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \quad N_j(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \qquad (2.6.3\text{- }18)$$
$$N_k(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \quad N_\ell(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

Interpolačný vzťah (2.3-8) pre posunutie všeobecného bodu prvku potom je

$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix} u(\xi,\eta) \\ v(\xi,\eta) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 & N_\ell & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 & N_\ell \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_i^e \\ v_i^e \\ u_j^e \\ \vdots \\ v_\ell^e \end{bmatrix}=\mathbf{N}(\xi,\eta)\mathbf{a}^e \quad (2.6.3\text{- }19)$$

Prvok použijeme v izoparametrickej formulácii, takže aj na nájdenie globálnych súradníc bodu (ξ,η) zo súradníc uzlových bodov prvku využijeme funkcie (18)

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x(\xi,\eta) \\ y(\xi,\eta) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 & N_\ell & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 & N_\ell \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_i^e \\ y_i^e \\ x_j^e \\ \vdots \\ y_\ell^e \end{bmatrix}=\mathbf{N}(\xi,\eta)\mathbf{x}^e \quad (2.6.3\text{- }20)$$

Maticovým zápisom vzťahov (5) s využitím (19) dostaneme transformačnú maticu deformácií $\mathbf{B}^e$ prvku

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_i^e & \mathbf{B}_j^e & \mathbf{B}_k^e & \mathbf{B}_\ell^e\end{bmatrix}\mathbf{a}^e=\mathbf{B}^e\mathbf{a}^e \quad (2.6.3\text{- }21)$$

kde

$$\mathbf{B}_i^e=\begin{bmatrix} \partial N_i/\partial x & 0 \\ 0 & \partial N_i/\partial y \\ \partial N_i/\partial y & \partial N_i/\partial x \end{bmatrix}$$

a pri ostatných submaticiach sa len vymení index *i* za príslušný index submatice.

Keďže už poznáme matice $\mathbf{D}^e$, $\mathbf{N}^e$ a $\mathbf{B}^e$ prvku, možeme jeho maticu tuhosti určiť z (2.3-13) a jeho vektory prvkového zaťaženia z (2.3-15) až (2.3-17). Pritom narazíme opäť na problém, ktorý sme v súvislosti s izoparametrickými prvkami rozoberali pri jednorozmernom prútovom prvku, a to je problém derivovania a integrovania funkcií s prirodzenými súradnicami v týchto vzťahoch a na numerický výpočet integrálov po objeme, resp. časti plochy prvku.

Aj v tomto dvojrozmernom prípade postupujeme pri riešení týchto problémov rovnako ako pri jednorozmernom prvku v časti 2.6.1.3. Zaoberajme sa najprv výpočtom derivácií v matici $\mathbf{B}^e$. Ak použijeme pravidlo derivovania funkcie viacerých premenných, môžeme napísať

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi}=\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi}+\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (2.6.3\text{- }22)$$

Pretože výsledok pre η je analogický, v maticovom tvare dostávame

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_e \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{2.6.3-23}$$

kde $\mathbf{J}_e$ je Jakobián, ktorý rovnako ako pri jednorozmernom prvku, vyjadruje závislosť derivácií globálnych súradníc podľa ξ a η a jeho členy sa z (20) dajú ľahko vyjadriť. Výsledné vzťahy pre derivácie N_i podľa globálnych súradníc dostaneme z (23)

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_e^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{det\,\mathbf{J}_e} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{2.6.3-24}$$

z ktorých sa už derivácie potrebné pre určenie matice $\mathbf{B}^e$ dajú explicitne určiť. Platí to aj pre výpočet všetkých ďalších potrebných matíc prvku, z ktorých niektoré vyjadríme, aby sme ukázali postup pri výpočte integrálov dvojrozmerných prvkov pomocou numerickej integrácie.

Výsledný vzťah pre algoritmické a programové spracovanie výpočtu matice tuhosti prvku s konštantnou hrúbkou t dostaneme zo základného vzorca (2.3-13) týmito krokmi

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^e &= \int_{V_e} \mathbf{B}_e^T \mathbf{D}_e \mathbf{B}_e dV = t \iint_{S_e} \mathbf{B}_e^T \mathbf{D}_e \mathbf{B}_e dxdy = t \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathbf{B}_e^T \mathbf{D}_e \mathbf{B}_e\, det\,\mathbf{J}_e d\xi d\eta \approx \\ &\approx t \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} w_i w_j \left[\mathbf{B}_e^T \mathbf{D}_e \mathbf{B}_e\, det\,\mathbf{J}_e \right]_{\xi_i,\eta_j} \end{aligned} \tag{2.6.3-25}$$

kde n je počet integračných bodov v jednom smere a w_i, w_j sú váhové násobky pre súradnice integračných bodov ξ_i, η_j podľa tabuľky 2.1.

Pri výpočte vektorov prvkového zaťaženia postupujeme podobne. Napr. pre vektor teplotného zaťaženia prvku (2.3-15) platí

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\varepsilon_T}^e &= \int_{V_e} \mathbf{B}_e^T \mathbf{D}_e \boldsymbol{\varepsilon}_T^e dV = t \iint_{S_e} \mathbf{B}_e^T \mathbf{D}_e \boldsymbol{\varepsilon}_T^e dxdy = t \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathbf{B}_e^T \mathbf{D}_e \boldsymbol{\varepsilon}_T^e\, det\,\mathbf{J}_e d\xi d\eta \approx \\ &\approx t \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} w_i w_j \left[\mathbf{B}_e^T \mathbf{D}_e \boldsymbol{\varepsilon}_T^e\, det\,\mathbf{J}_e \right]_{\xi_i,\eta_j} \end{aligned} \tag{2.6.3-26}$$

kde podľa 2.1- 9

$$\boldsymbol{\varepsilon}_T(\xi_i,\eta_j) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{Tx} \\ \varepsilon_{Ty} \\ \gamma_{Txy} \end{bmatrix}_{\xi_i,\eta_j} = \alpha_e \left\{ T_e(\xi_i,\eta_j) - T_{ref} \right\} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Teplota v integračnom bode prvku $T_e(\xi_i,\eta_j)$ sa vypočíta interpoláciou uzlových hodnôt teploty pomocou interpolačných funkcií prvku

$$T_e(\xi_i,\eta_j)=\sum_{m=1}^{4} N_m^e(\xi_i,\eta_j)T_m^e \qquad (2.6.3\text{-}27)$$

Postup pri určovaní matíc prvku rovinnej deformácie a rotačne symetrického telesa je rovnaký a rozdiel oproti rovinnej napätosti je len formálny. Rozdielne sú členy a rozmery v maticiach $\mathbf{D}_e$ a $\mathbf{B}_e$, hrúbka pri rovinnej deformácii je jednotková a pri rotačne symetrickom telese treba správne integrovať po objeme resp. ploche prvku. Napr. matica tuhosti prvku pre rotačne symetrické teleso sa určuje takto

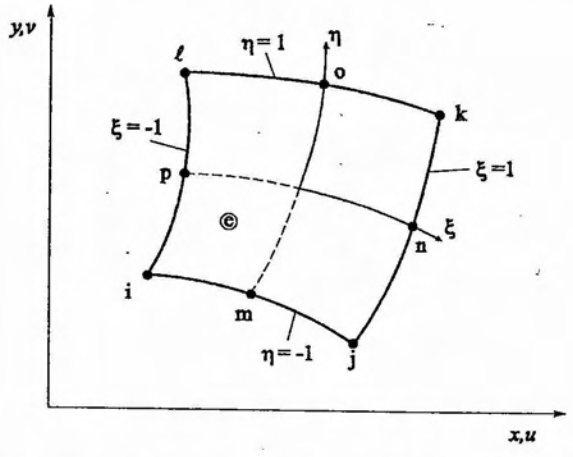
$$\mathbf{K}^e=\int_{V_e}\mathbf{B}_e^T\mathbf{D}_e\mathbf{B}_e dV=2\pi\iint_{S_e}\mathbf{B}_e^T\mathbf{D}_e\mathbf{B}_e r dr dy=2\pi\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\mathbf{B}_e^T\mathbf{D}_e\mathbf{B}_e\left(\sum_{k=1}^{4}N_k r_k\right)\det\mathbf{J}_e d\xi d\eta\approx$$
$$\approx 2\pi\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}w_i w_j\left[\mathbf{B}_e^T\mathbf{D}_e\mathbf{B}_e\left(\sum_{k=1}^{4}N_k r_k\right)\det\mathbf{J}_e\right]_{\xi_i,\eta_j} \qquad (2.6.3\text{-}28)$$

Ako vidieť, premenná r, ktorú v tomto prípade obsahuje diferenciál objemu $dV=2\pi r dS$, sa vyjadruje interpoláciou jej uzlových hodnôt pomocou tvarových funkcií prvku.

Kvalita bilineárneho prvku nie je vysoká najmä pri výpočte oblastí s vyššími gradientami pretvorení a napätí a pokiaľ chceme dostať dostatočne presné hodnoty týchto veličín, musíme zvoliť husté delenie oblasti. Navyše prvok nepresne vystihuje zakrivené okraje a dochádza ku skresleniu výsledkov v okolí zakrivených geometrických koncentrátorov napätia. Tieto nevýhody odstraňujú prvky s vyšším stupňom aproximačných funkcií zložiek posunutia. Najčastejšie sa na riešenie dvorozmerných úloh využívajú štvoruholníkové a trojuholníkové izoparametrické *kvadratické* prvky.

2.6.3.2 Kvadratický izoparametrický štvoruholníkový prvok

Vyššou (kvadratickou) verziou bilineárneho prvku je rovinný osemuzlový štvoruholníkový izoparametrický prvok (obr. 2.16). Prvok má štyri rohové uzly a štyri uzly umiestnené v stredoch jeho strán (stredové uzly). Cez tri body môžeme preložiť kvadratickú krivku; prvok teda môže mať v prípade potreby zakrivené strany.



Obrázok 2.16 Kvadratický izoparamatrický štvoruholníkový prvok

Každý uzol má dva posuvné stupne voľnosti, prvok má šestnásť stupňov voľnosti a na vyjadrenie zložiek posunutia všeobecného bodu prvku máme k dispozícii 16 zložiek posunutí uzlových bodov. Interpolačný vzťah (2.3-8) pre posunutie všeobecného bodu prvku potom obsahuje osem interpolačných funkcií (v tvare kvadratických polynómov)

$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix}u(\xi,\eta)\\ v(\xi,\eta)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & \cdots & N_p & 0\\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & \cdots & 0 & N_p\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_i^e\\ v_i^e\\ u_j^e\\ \vdots\\ v_p^e\end{bmatrix}=\mathbf{N}(\xi,\eta)\mathbf{a}^e \qquad (2.6.3\text{-}29)$$

Interpolačné funkcie možno opäť určiť priamo z ich základných vlastností, pravda, táto procedúra je zložitejšia ako pri bilineárnom prvku. Jeden z možných postupov vychádza z toho, že pre každý uzol možno tvarovú funkciu vytvoriť ako súčin dvoch funkcií f_1 a f_2

$$N=f_1(\xi,\eta)\,f_2(\xi,\eta) \qquad (2.6.3\text{-}30)$$

Pre príslušný uzol sa funkcia f_1 zvolí tak, aby dávala nulu na stranách prvku, ktoré nevychádzajú z uzla. Funkciu f_2 volíme tak, aby pri vynásobení s f_1 dávala jednotku v danom uzle a nulu v susedných uzloch. Ukážme si tento postup pre rohový uzol k, ktorého prirodzené súradnice sú $\xi = 1$ a $\eta = 1$. Funkcia

$$f_1(\xi,\eta)=(1+\xi)(1+\eta)$$

spĺňa podmienku, pretože pozdĺž strany ij $(\eta=-1)$ ako aj $i\ell$ (ξ = -1) má nulovú hodnotu. Funkciu f_2 zvolíme v tvare

$$f_2(\xi,\eta)=a_1+a_2\xi+a_3\eta$$

Jej koeficienty určíme zo spomenutých troch podmienok pre súčin oboch funkcií v uzloch k, n a o

$$f_1(1,1)\,f_2(1,1)=4(a_1+a_2+a_3)=1$$

$$f_1(1,0)\,f_2(1,0)=2(a_1+a_2)=0$$

$$f_1(0,1)\,f_2(0,1)=2(a_1+a_3)=0$$

s výsledkom $a_1 = -¼$, $a_2 = ¼$, $a_3 = ¼$.

Tvarová funkcia uzla potom je $N_k=(1+\xi)(1+\eta)(-¼+¼\xi+¼\eta)$. Tvarové funkcie ostatných rohových uzlov určíme analogicky a dostávame

$$N_i=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-1-\xi-\eta)$$

$$N_j=\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(-1+\xi-\eta)$$

$$N_k=\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(-1+\xi+\eta)$$

$$N_\ell = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-1-\xi+\eta) \qquad (2.6.3\text{-}31)$$

Postup určovania tvarových funkcií stredových uzlov si ukážeme pre uzol n $(\xi = 1, \eta = 0)$. Funkciu f_1 zvolíme tak, aby pozdĺž strán ij ($\eta = -1$), $i\ell$ (ξ = -1) a $k\ell$ (η = 1) mala nulovú hodnotu

$$f_1(\xi,\eta) = (1+\xi)(1+\eta)(1-\eta)$$

Pretože obsahuje kvadratické členy, f_2 sa musí rovnať konštante (inak by sme dostali aj kubický člen)

$$f_2(\xi,\eta) = a_1$$

Konštantu a_1 vypočítame z (30) a podmienky, že tvarová funkcia vo svojom uzle sa musí rovnať jednej ($N_n = 1$ pre $\xi = 1$ a $\eta = 0$)

$$f_1(1,0)a_1 = (1+1)(1+0)(1+0)a_1 = 1$$

z čoho a_1 = ½ a $\qquad N_n = \frac{1}{2}(1+\xi)(1+\eta)(1-\eta) = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)$.

Analogicky možno nájsť tvarové funkcie aj ostatných troch stredových uzlov a dostávame

$$\begin{aligned} N_m &= \frac{1}{2}(1-\eta)(1-\xi^2) \\ N_n &= \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2) \\ N_o &= \frac{1}{2}(1+\eta)(1-\xi^2) \\ N_p &= \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2) \end{aligned} \qquad (2.6.3\text{-}32)$$

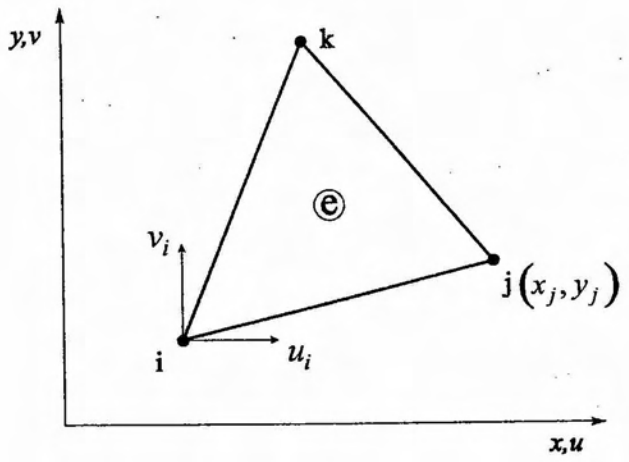
Ďalší postup tvorby matíc prvku je rovnaký ako pri bilineárnom prvku z predchádzajúceho odstavca, zväčšia sa len rozmery matíc prvku, čo vyplýva z väčšieho počtu stĺpcov matice $\mathbf{N}^e$ a väčšieho počtu členov vektora $\mathbf{a}^e$.

2.6.3.3 Trojuholníkové prvky

Lineárny trojuholníkový trojuzlový prvok (obr. 2.17) je najjednoduchší prvok pre riešenie dvojrozmerných úloh MKP. Všetky jeho matice sa dajú jednoducho explicitne vyjadriť v globálnom súradnicovom sytéme klasickým postupom uvedeným v časti 2.3, pravda, jeho kvalita z hľadiska presnosti riešenia úlohy je nízka. Vyplýva to z nízkeho stupňa jeho interpolačných funkcií.

Na interpoláciu ľubovoľnej prvkovej funkcie z jej uzlových hodnôt máme k dispozícii len jednoduchý lineárny polynóm; napr. posunutie všeobecného bodu prvku v smere globálnej osi x bude

$$u(x,y) = a_1 + a_2 x + a_3 y \qquad (2.6.3\text{-}33)$$



Obrázok 2.17 Lineárny trojuholníkový prvok

Do tohoto vzťahu dosadíme uzlové hodnoty

$$\begin{aligned} u_i^e &= a_1 + a_2 x_i^e + a_3 y_i^e \\ u_j^e &= a_1 + a_2 x_j^e + a_3 y_j^e \\ u_k^e &= a_1 + a_2 x_k^e + a_3 y_k^e \end{aligned} \qquad (2.6.3\text{-}34)$$

Z tejto sústavy rovníc dostaneme

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2S_e}\left[\left(x_j^e y_k^e - x_k^e y_j^e\right)u_i^e + \left(x_k^e y_i^e - x_i^e y_k^e\right)u_j^e + \left(x_i^e y_j^e - x_j^e y_i^e\right)u_k^e\right] \\ a_2 &= \frac{1}{2S_e}\left[\left(y_j^e - y_k^e\right)u_i^e + \left(y_k^e - y_i^e\right)u_j^e + \left(y_i^e - y_j^e\right)u_k^e\right] \\ a_3 &= \frac{1}{2S_e}\left[\left(y_k^e - y_j^e\right)u_i^e + \left(y_i^e - y_k^e\right)u_j^e + \left(y_j^e - y_i^e\right)u_k^e\right] \end{aligned} \qquad (2.5.3\text{-}35)$$

kde dvojnásobnú plochu elementu vypočítame zo vzťahu

$$2S_e = x_i^e\left(y_j^e - y_k^e\right) + x_j^e\left(y_k^e - y_i^e\right) + x_k^e\left(y_i^e - y_j^e\right) \qquad (2.5.3\text{-}36)$$

Dosadením (35) do (33) a úpravou do maticového tvaru dostaneme x-ové posunutie všeobecného bodu

$$u(x,y) = \begin{bmatrix} N_i^e & N_j^e & N_k^e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_i^e \\ u_j^e \\ u_k^e \end{bmatrix} \qquad (2.5.3\text{-}37)$$

kde tvarové funkcie prvku sú

$$N_i^e = \frac{1}{2S_e}\left(\mathrm{A}_i + \mathrm{B}_i x + \mathrm{C}_i y\right)$$

$$N_j^e = \frac{1}{2S_e}\left(\mathrm{A}_j + \mathrm{B}_j x + \mathrm{C}_j y\right)$$

$$N_k^e = \frac{1}{2S_e}\left(\mathrm{A}_k + \mathrm{B}_k x + \mathrm{C}_k y\right) \qquad (2.6.3\text{-}38)$$

s konštantami pre uzol i

$$\mathrm{A_i} = x_j^e y_k^e - x_k^e y_j^e \qquad \mathrm{B_i} = y_j^e - y_k^e \qquad \mathrm{C_i} = x_k^e - x_j^e$$

Pre uzol j a k tieto konštanty dostaneme cyklickou zámenou indexov.

Pretože zložku posunutia v smere osi y interpolujeme z uzlových hodnôt tými istými tvarovými funkciami, môžeme už transformačný vzťah posunutí pre lineárny trojuholníkový prvok zapísať v klasickom tvare

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i^e & 0 & N_j^e & 0 & N_k^e & 0 \\ 0 & N_i^e & 0 & N_j^e & 0 & N_k^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^e \\ v_i^e \\ u_j^e \\ v_j^e \\ u_k^e \\ v_k^e \end{bmatrix} = \mathbf{N}^e(x,y)\,\mathbf{a}^e \qquad (2.6.3\text{-}39)$$

Ďalší postup tvorby matíc prvku je už štandardný (pozri časť 2.3). Nízku kvalitu prvku, najmä pri výpočte deformácií a napätí, kde derivácie znižujú rád interpolačných funkcií, už teraz môžeme jednoducho demonštrovať. Ak z (5) a (37) vyjadríme zložky deformácie, dostaneme *konštatné hodnoty na celom prvku.* Napr. pre pomernú deformáciu v smere osi x platí (5)

$$\varepsilon_x^e = \frac{\partial u}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} & \frac{\partial N_j^e}{\partial x} & \frac{\partial N_k^e}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^e \\ u_j^e \\ u_k^e \end{bmatrix} = \frac{1}{2S_e}\left(\mathrm{B}_i u_i^e + \mathrm{B}_j u_j^e + \mathrm{B}_k u_k^e\right) = \text{konštanta}$$

Často sa potom z tohoto dôvodu hovorí o prvku konštantnej deformácie (prvok CST – *constant strain triangle)* a , samozrejme, aj konštantného napätia. Tieto veličiny sa potom pri aplikačnom použití tohoto prvku menia skokom pri prechode do susedného prvku. Aplikačné programy obyčajne tento prechod vyhladia spriemerovaním hodnôt susedných prvkov.

Tvarové funkcie prvku opäť majú štandartnú vlastnosť, že vo svojom uzle nadobúdajú jednotkovú hodnotu a v ostatných uzloch nulovú, navyše tiež pre ne platí

$$N_i^e + N_j^e + N_k^e = 1 \qquad (5.3\text{-}40)$$

Vlastnosť (40) tvarových funkcií lineárneho trojuholníkového prvku sa nám ozrejmí v nasledujúcej časti, kde si tieto funkcie vyjadríme pomocou plošných súradníc trojuholníka.

2.6.3.4 Plošné súradnice trojuholníkových prvkov

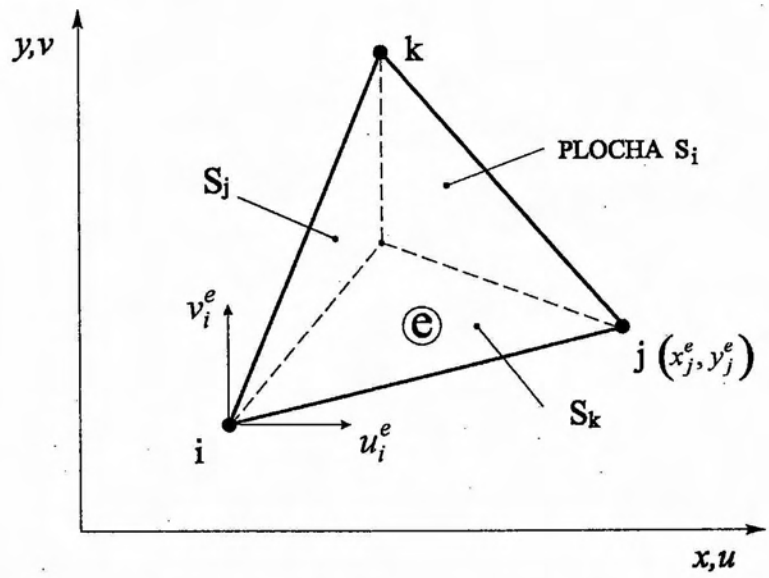
Pre jednoduchý zápis interpolačných funkcií trojuholníkových prvkov sa často využívajú plošné súradnice trojuholníkovej oblasti. Plošné súradnice trojuholníka patria do triedy prirodzených bezrozmerných súradníc, ktoré sa však na rozdiel od štvoruholníka menia len

v rozsahu od nuly po jednotku. Ak si v trojuholníkovom trojuzlovom prvku zvolíme všeobecný bod (x,y) a spojíme ho s uzlami i, j, k (obr. 2.18) potom plošné súradnice prvku sú definované pomermi vzniknutých plôch k celkovej ploche S_e prvku

$$L_i = \frac{S_i}{S_e}, \qquad L_j = \frac{S_j}{S_e}, \qquad L_k = \frac{S_k}{S_e} \tag{2.6.3-41}$$

Potom je zrejmé, že platí

$$L_i + L_j + L_k = 1 \tag{2.6.3-42}$$

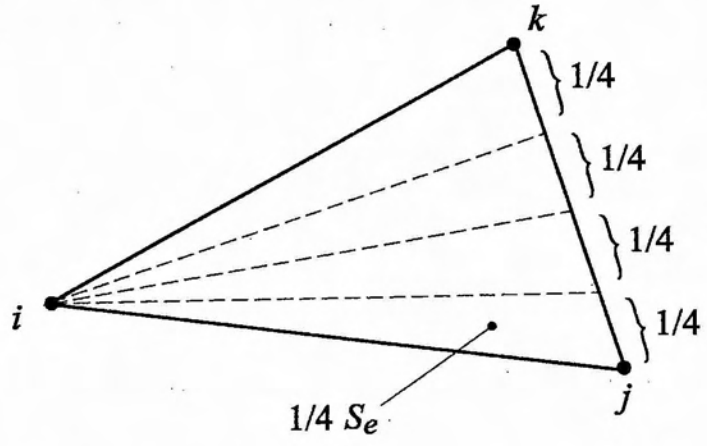


Obrázok 2.18 Plochy trojuholníka pre určenie plošných súradníc

Závislosť súradníc x a y od plošných súradníc môžeme zapísať v tvare

$$\begin{aligned} x &= L_i x_i^e + L_j x_j^e + L_k x_k^e \\ y &= L_i y_i^e + L_j y_j^e + L_k y_k^e \end{aligned} \tag{2.6.3-43}$$

pretože tieto vzťahy platia v bodoch i, j, k a medzi nimi sa x a y menia lineárne (obr. 2.19).



Obrázok 2.19 Lineárna zmena plošnej súradnice pri pohybe bodu po strane prvku

Rovnice (42) a (43) zapíšeme v maticovom tvare

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_i^e & x_j^e & x_k^e \\ y_i^e & y_j^e & y_k^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_i \\ L_j \\ L_k \end{bmatrix} \qquad (2.6.3\text{-}44)$$

a inverziou tohoto vzťahu dostávame hľadanú závislosť

$$\begin{bmatrix} L_i \\ L_j \\ L_k \end{bmatrix} = \frac{1}{2S_e} \begin{bmatrix} \left(x_j^e y_k^e - x_k^e y_j^e\right) & y_j^e - y_k^e & x_k^e - x_j^e \\ \left(x_k^e y_i^e - x_i^e y_k^e\right) & y_k^e - y_i^e & x_i^e - x_k^e \\ \left(x_i^e y_j^e - x_j^e y_i^e\right) & y_i^e - y_j^e & x_j^e - x_i^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} \qquad (2.6.3\text{-}45)$$

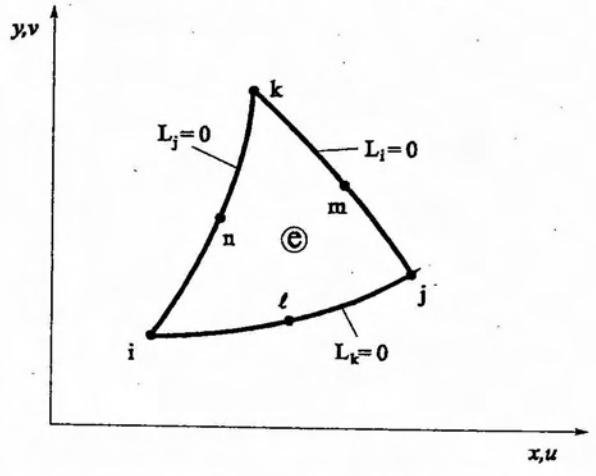
kde pre plochu trojuholníka platí vzťah (36). Z porovnania vidieť, že plošné súradnice v (45) sa rovnajú interpolačným funkciám lineárneho trojuholníkového prvku (38) a môžeme napísať

$$N_i^e = L_i, \qquad N_j^e = L_j, \qquad N_k^e = L_k \qquad (2.6.3\text{-}46)$$

Z rovníc (46) a (42) vyplýva teda vlastnosť (40) interpolačných funkcií tohoto prvku.

Plošné súradnice trojuholníka nám poskytujú jednoduchý zápis interpolačných funkcií trojuholníkových prvkov vyšších stupňov. Napr. pre kvadratický šesťuzlový prvok na obr. 2.20 tvarové funkcie sú (uvádzame ich bez odvodenia)

$$\begin{aligned} N_i^e &= L_i\left(2L_i - 1\right) \\ N_j^e &= L_j\left(2L_j - 1\right) \\ N_k^e &= L_k\left(2L_k - 1\right) \\ N_\ell^e &= 4L_iL_j \\ N_m^e &= 4L_jL_k \\ N_n^e &= 4L_iL_k \end{aligned} \qquad (2.6.3\text{-}47)$$



Obrázok 2.20 Kvadratický izoparamatrický trojuholníkový prvok

Optimálne vlastnosti pre riešenie dvojrozmerných úloh má kvadratický štvoruholníkový prvok, ktorý treba preferovať pri riešení týchto úloh. V okolí koncentrátorov napätia treba primerane k ich „ostrosti" zhustiť delenie. Automatický programový generátor prvkov v prípade potreby (s ohľadom na tvar delenej plochy) doplní tieto prvky kompatibilnými kvadratickými trojuholníkovými prvkami. Dobrým vizuálnym odhadom kvality siete prvkov na delenej ploche je pohľad na hustotu uzlových bodov. Treba si pritom uvedomiť, že program vyčísľuje hodnoty hľadaných funkcií (zložiek posunutia) v týchto bodoch a pomocou interpolačných funkcií prvkov ich interpoluje do celej oblasti. O čo bude teda väčšia hustota týchto bodov a o čo bude vyšší stupeň interpolačných funkcií použitých prvkov, o to bude presnosť riešenia vyššia.

Pokiaľ nám na presnosti riešenia mimoriadne záleží a chceme mať aj určitý prehľad o dosiahnutej presnosti riešenia, môžeme pri lineárnych pevnostných úlohách zadať tzv. p-metódu riešenia úlohy, o ktorej hovoríme podrobnejšie v časti 2.6.3.5. Iná metóda spresnenia výsledkov v okolí ostrých koncentrátorov napätí je metóda submodelingu (pozri napr. dokumentáciu k programu ANSYS [4]).

Príklad 2.7

Pre prstenec zadaný v príklade 2.1 určite po jeho hrúbke priebehy tangenciálneho, radiálneho napätia a intenzity napätia. Na riešenie použite kvadratický prvok rotačne symetrického telesa.

1. Zadanie názvu úlohy
Utility Menu>File>Change Jobname..., /FILNAM = PRSTENEC2, OK;

2. Zadanie typu prvku pre úlohu
Main Menu>Preprocessor>Element Type>Add/Edit/Delete, Add..., Solid 8 node 82, OK, Options...,
K3 = Axisymetric, OK, Close;

3. Materiálové údaje
Preprocessor>Material Props>Material Models, Structural, Linear, Elastic, Isotropic, EX = 2.1e11,
PRXY = 0.3, OK, Material, Exit;

4. Zapnutie trvalého číslovania entít kvôli kontrole
Utility Menu>PlotCtrls>Numbering...>KP = ON, LINE = ON, OK;

5. Zapnutie priestorového pohľadu na úlohu
Utility Menu>PlotCtrls>Pan Zoom Rotate..., Iso;

6. Vytvorenie bodov tvoriacej plochy modelu (číslovanie je automatické)
Preprocessor>Modeling>Create>Keypoints>In Active CS: X = 0.1, Y = 0, Apply,
X = 0.1, Y = 0.2, Apply,
X = 0.2, Y = 0.2, Apply,
X = 0.2, Y = 0, OK;

7. Vytvorenie tvoriacej plochy
Preprocessor>Modeling>Create>Areas>Arbitrary>Trough KPs: ↑KP1,↑KP2,↑KP3,↑KP4, OK;

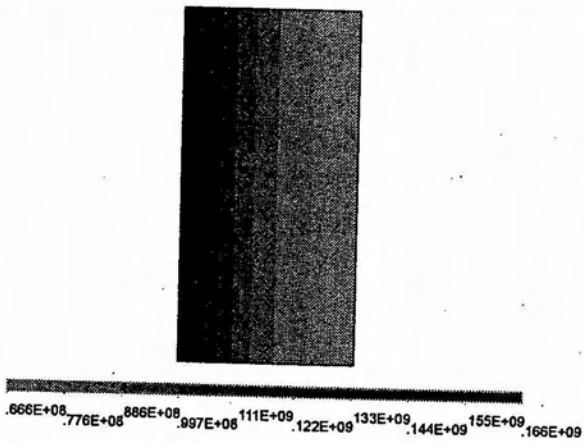
8. Vytvorenie prvkov
Preprocessor>Meshing>Mesh Tool: Size Controls: Lines, Set: ↑L1, ↑L3, Apply, NDIV = 4, Apply,
↑L2, ↑L4, OK, NDIV = 8, OK;
(Preprocessor>Meshing>Mesh Tool): Mesh, Pick All;

9. Upevnenie modelu
Main Menu>Solution>Define Loads>Apply>Structural>Displacement>On Lines: (*Utility Menu>Plot>Lines*) ↑L4, OK, Vyznačiť UY, OK;

10. Zadanie tlaku *Main Menu>Solution>Define Loads>Apply>Structural>Pressure>On Lines*: ↑L1, OK, VALUE = 100E6, OK;

11. Príkaz na vykonanie výpočtu
Solution>Solve>Current LS, Solve Current Load Step, OK;

12. Hodnoty obvodového napätia po hrúbke prstenca
Main Menu>General Postproc>Plot Results>Contour Plot>Nodal Solu: Stress, Z-direction SZ, OK;

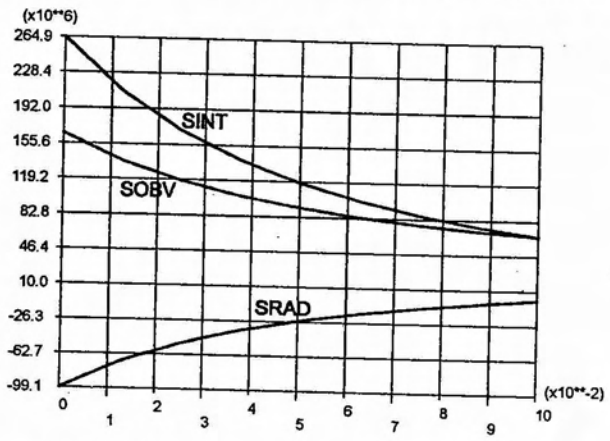


13. Nakreslenie uzlov
Utility Menu>Plot>Nodes;

14. Vytvorenie *cesty* (*path*) pre znázornenie výsledkov
General Postproc>Path Operations>Define Path>By Nodes: Kliknite postupne zľava doprava na uzly ľubovoľnej vodorovnej skupiny naprieč hrúbke prstenca, OK: Name = cesta, OK;

15. Zadanie údajov pre *cestu*:
General Postproc>Path Operations>Map Onto Path: Stress, x-direction SX, Apply,
Stress, z-direction SZ, Apply,
Stress, Intensity SINT, OK;

16. Graf priebehu napätí po hrúbke prstenca (SX = radiálne napätie, SZ = obvodové napätie, SINT = intenzita napätia)
General Postproc>Path Operations>Plot Path Item>On Graph: Vyznačte SX, SZ, SINT, OK;



14. Ukončenie práce s uložením databázy úlohy
Ansys Toolbar>Quit>Save Geom+Loads, OK;

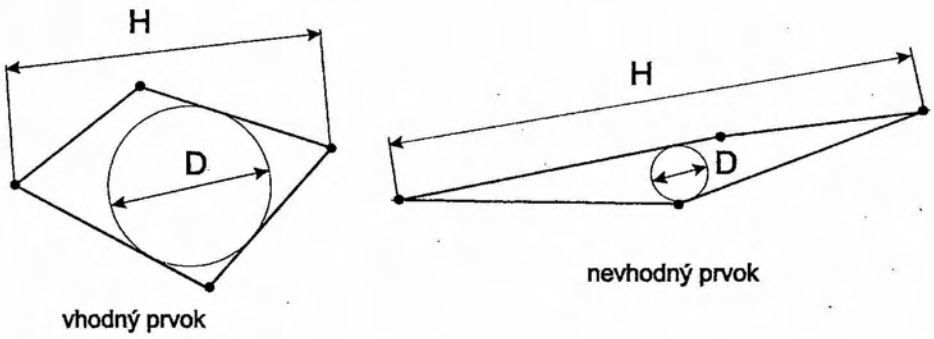
2.6.3.5 P-metóda riešenia lineárnych pevnostných úloh

Nahradenie spojitého telesa diskrétnou sústavou konečných prvkov a z toho vyplývajúce zjednodušenie riešenia úlohy prináša so sebou aj nevýhodu vo forme diskretizačných chýb vnesených do hľadaných hodnôt. Presnosť riešenia lineárnej úlohy ovplyvňujú predovšetkým tieto procedúry MKP:

1. Globálne funkcie sa nahradzujú aproximačnými polynómami na podoblastich telesa
2. Integrály po objeme telesa sa nahradzujú numerickou integráciou na jeho konečných prvkoch
3. Spojité okrajové podmienky (zaťaženie, upevnenie) sa nahradzujú diskrétnymi v uzlových bodoch
4. Náhrada zakrivených častí telesa je vo všeobecnosti len približná

Výborná presnosť a konvergencia metódy sa často ilustruje výpočtom jednoduchých úloh a porovnaním výsledkov so známym analytickým riešením takýchto úloh. Treba však povedať, že pri riešení úloh pre zložito tvarované a zložito zaťažené telesá nepoznáme veľkosť chyby, ktorou sú ovplyvnené získané hodnoty, a pritom pri nesprávnej tvorbe výpočtového modelu (siete konečných prvkov) môže byť neprípustne veľká. Je preto pochopiteľné, že zásadám, ktoré zaručujú dostatočne presné výsledky numerickej analýzy sa v teórii MKP venuje zaslúžená pozornosť a niektoré výsledky týchto adaptívnych postupov prenikli už aj do komerčných aplikačných programov.

Ako sme uviedli v predchádzajúcich častiach, znižovanie diskretizačných chýb dosahujeme jednak zhusťovaním siete prvkov, ako aj použitím prvkov s vyšším stupňom iterpolačných polynómov. Tretím významným faktorom je kvalita siete, ktorej meradlom sú pre rôzne typy prvkov rôzne definované *distorzné faktory* vyjadrujúce mieru odklonu prvku od ideálneho tvaru, ktorým je z hľadiska numerickej integrácie štvorec, rovnostranný trojuholník, rovnostranný ihlan, kocka a pod., t. j. tvary, kde pomer maximálneho rozmeru prvku a priemeru najväčšej vpísanej kružnice resp. gule *H/D* (obr. 2-21) je čo najmenší. Väčšina komerčných programov MKP kontroluje kvalitu siete a rôznymi formami zabraňuje používaniu nevhodných prvkov. Automatický alebo poloautomatický programový generátor siete prvkov na zložite tvarovanej ploche, resp. objeme buď vytvorí aj nevhodné prvky a na ne upozorní, alebo odmietne takúto oblasť deliť na prvky. V oboch prípadoch musí užívateľ zasiahnúť do kritickej geometrickej entity napr. jej rozdelením na jednoduchšie celky a opätovne ju diskretizovať.



Obrázok 2.21

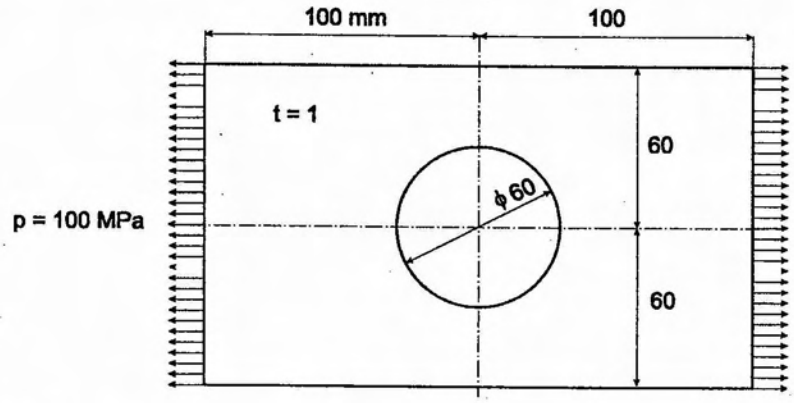
Bežný postup riešenia úloh pre spojité telesá je ten, že sa pre úlohu zvolí vhodný prvok a na geometrickom modeli telesa sa vytvorí sieť konečných prvkov s lokálnou mierkou siete *h*

(napr. priemerná veľkosť hrany prvku). V okolí tvarových koncentrátorov napätí sa sieť prvkov zhusťuje v intuitívnej snahe o zhruba rovnakú presnosť riešenia vo všetkých častiach modelu. Je to proces podobný aproximácii krivky multilineárnou lomenou čiarou; čím viac bodov na krivke zvolíme, tým bude aproximácia presnejšia. Spresňovanie riešenia postupným zjemňovaním siete buď v celej oblasti alebo v jej lokalitách s vysokými gradientami hľadaných hodnôt sa nazýva *h*-metóda riešenia úlohy. V prípade, že pri zjemnenej sieti sa už hľadané hodnoty málo líšia od hodnôt z predchádzajúceho riešenia, považuje sa výpočtový model úlohy za dostatočne presný.

Pri tzv. *p*-metóde sa rovnomerná presnosť riešenia pri zvolenej nemennej hustote delenia dosahuje zvyšovaním polynomického stupňa p interpolačných funkcií prvkov v miestach s vyššou koncentráciou napätia pri postupnom viackrokovom riešení úlohy. Program úlohu najprv vyrieši s kvadratickými prvkami a potom pri opakovaných riešeniach zvyšuje stupeň interpolačných polynómov prvkov modelu dovtedy, kým sa v každom prvku nedosiahne rovnaký stanovený percentuálny rozdiel riešenia (kontrolovaný vhodnou zvolenou mierkou konvergencie). Požadovaná následná (posteriórna) presnosť riešenia sa môže predpísať buď globálne pre všetky prvky alebo len pre prvky v okolí zvolených uzlov. Uvedenú metódu ilustruje nasledujúci príklad.

Príklad 2.8

Pre ťahaný oceľový pás ($E = 2{,}1\ 10^5$ MPa, $\mu = 0{,}3$) zadaný na obrázku určite maximálnu hodnotu intenzity napätia bežným postupom i využitím *p*-metódy pri hrubom delení telesa.



1. Zadanie názvu úlohy
Utility Menu>File>Change Jobname..., /FILNAM = PAS_S_OTVOROM, OK;

2. Zadanie typu prvku pre úlohu
Main Menu>Preprocessor>Element Type>Add/Edit/Delete, Add..., Solid Triangle 6 node 2, OK, Close;

3. Materiálové údaje
Preprocessor>Material Props>Material Models, Structural, Linear, Elastic, Isotropic, EX = 2.1e5, PRXY = 0.3, OK, Material, Exit;

4. Zapnutie trvalého číslovania entít kvôli kontrole
Utility Menu>PlotCtrls>Numbering... LINE = ON, = AREA = ON, OK;

Tvorba geometrického modelu symetrickej štvrtiny pásu
5. *Preprocessor>Modeling>Create>Areas>Rectangle>By 2 Corners*: Width = 100, Height = 60, OK;
6. *Preprocessor>Modeling>Create> Areas>Circle>Solid Circle*: Radius = 30, OK;
7. *Preprocessor>Modeling>Operate>Booleans>Subtract>Areas*: ↑A1, OK, ↑A2, OK;

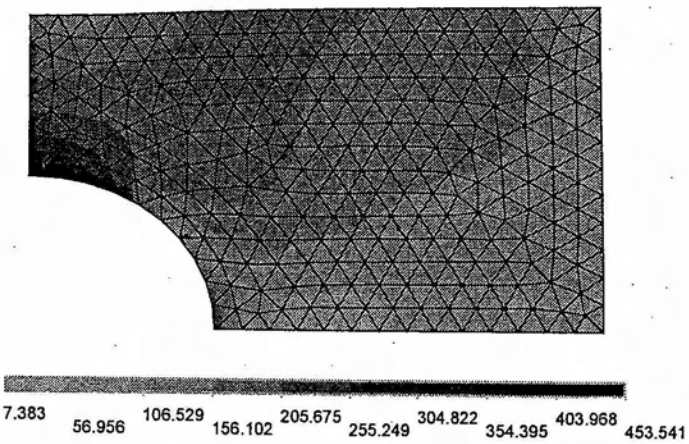
8. Predpísanie symetrických okrajových podmienok pre posunutia
Preprocessor>Loads>Define Loads>Apply>Structural>Displacement>SymmetryB.C.>
On Lines: ↑L9, ↑L10, OK;

9. Ťahové zaťaženie
Preprocessor>Loads>Define Loads>Apply>Structural>Pressure>On Lines:
↑L2, OK, Value = -100, OK;

10. Vytvorenie prvkov
Preprocessor>Meshing>Mesh Tool: Size Controls: Global, Set: SIZE = 5, OK, Mesh, Pick All;

11. Príkaz na vykonanie výpočtu
Solution>Solve>Current LS, Solve Current Load Step, OK;

12. Veľkosť a rozdelenie intenzity napätia
General Postproc>Plot Results>Contour Plot>Element Solu... Stress, Intensity SINT, OK;

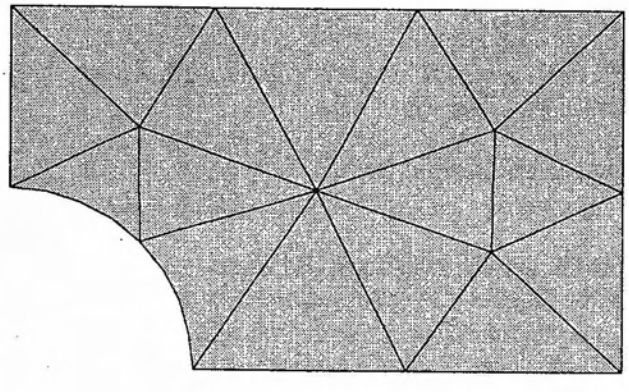


13. Vymazanie prvkov h-metódy
Main Menu>Preprocessor> Meshing>Mesh Tool: Clear, Pick All;
Preprocessor>Element Type>Add/Edit/Delete: Delete (Plane2), Close;

14. Zapnutie p-metódy
Main Menu >Preferences: p-Method Struct., ON, OK;

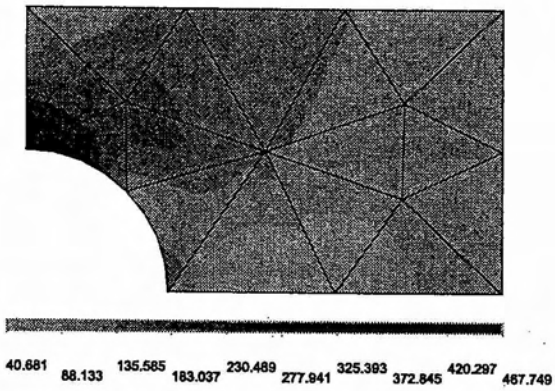
15. Zadanie a vytvorenie prvkov pre p-metódu
Preprocessor>Element Type>Add/Edit/Delete>Add..., p-Elements, 2D Triangle 146, OK, Close;
Main Menu>Preprocessor> Meshing> Mesh Tool: Size Controls, Global, Set, SIZE = 40, OK,
Mesh, Pick All;

16. Vylepšenie grafiky
Utility Menu>Plot Ctrls>Style>Size and Shape..., /EFACET = 4 facets/edge, OK;

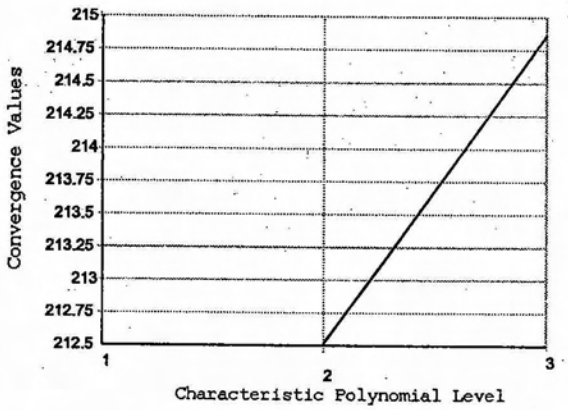


17. Prvé riešenie úlohy p-metódou
Solution>Solve>Current LS, Solve Current Load Step, OK;

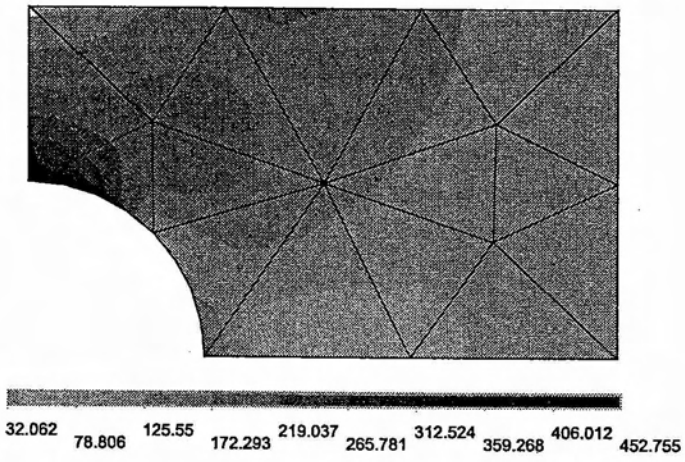
18. Veľkosť a rozdelenie intenzity napätia (pri vzniku odchýlky v sieti prvkov môžu v ďalšom vzniknúť číselné rozdiely)
General Postproc>Plot Results>Contour Plot>Element Solu... Stress, Intensity SINT, OK;



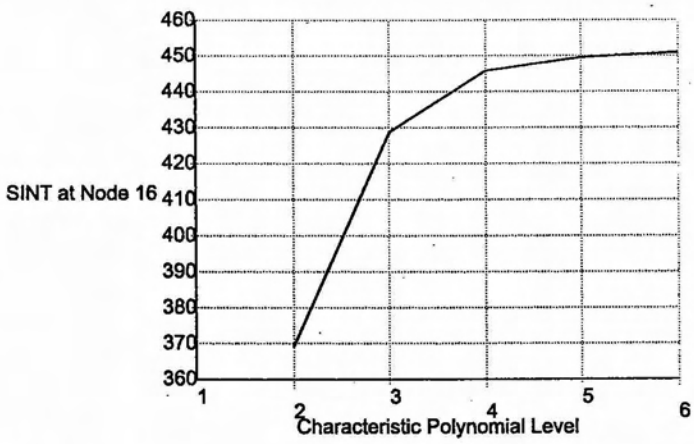
19. Kontrola konvergencie
General Postproc>Plot Results>p-Method>p-Convergence... Stress, Intensity SINT, OK;



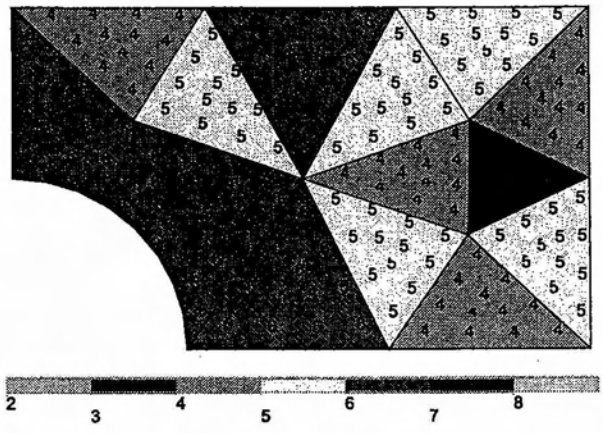
20. Zlepšenie konvergencie v mieste maximálnej intenzity napätia a nový výpočet
Utility Menu>Plot>Elements
Main Menu>Preprocessor>Loads>Load Step Opts>p-Method>Convergence Crit>Replace...,
Local for Solids, OK, Kliknite na horný uzol štvrťkružnice (t. j. uzol s maximálnou intenzitou napätia), OK, TOLER = 0.5, Stress, Intensity SINT, OK, Close;
Solution>Solve>Current LS, Solve Current Load Step, OK;
General Postproc>Plot Results>Contour Plot>Element Solu... Stress, Intensity SINT, OK;



21. Kontrola konvergencie
General Postproc>Plot Results>p-Method>p-Convergence: Stress, Intensity SINT, OK;



22. Pohľad na stupeň použitých interpolačných polynómov prvkov
General Postproc>Plot Results>p-Method>p-Levels: OK;



23. Ukončenie práce s uložením databázy úlohy
Ansys Toolbar>Quit>Save Geom+Loads, OK;

3 NESTACIONÁRNE PEVNOSTNÉ (DYNAMICKÉ) ÚLOHY

V predchádzajúcich kapitolách sme sa zoberali pevnostnými úlohami, pri ktorých na teleso (de facto na jeho diskrétny výpočtový model) pôsobili časovo nezávislé (ustálené, nemenné, statické) sily. Predpokladali sme, že sily pomaly narástli na konečnú hodnotu (aby sme mohli zanedbať účinok zotrvačných a tlmiacich síl a aby sa nám teleso nerozkmitalo) a potom sa už nemenili. V takomto stave sme pre teleso hľadali (ustálené, nemenné) hodnoty posunutí, deformácií a napätí.

V technickej praxi sa však často stretávame s úlohami, keď sa veľkosť zaťažujúcich síl s časom mení tak, že sa ich časová závislosť nedá zanedbať a musíme riešiť nestacionárnu (dynamickú) pevnostnú úlohu. Myslia sa tým teda predovšetkým úlohy voľného a vynúteného kmitania a dynamický ráz telies, ktoré majú v inžinierskej výpočtárskej praxi veľký význam. Pochopiteľne, že pri týchto úlohách aj hľadané veličiny (posunutia, rýchlosti, zrýchlenia, deformácie, napätia) sú funkcie času a teda ku geometrickým nezávislým premeným x, y, z nám pribudne ďalšia – čas t – a úlohu musíme riešiť v určitom časovom intervale $< 0, t_{max} >$.

Pri dynamickej úlohe môžeme považovať rovnice (2.5-9) za podmienky rovnováhy telesa v určitom časovom okamihu t

$$\mathbf{K}\mathbf{a}(t) = \mathbf{f}(t)$$

treba ich však doplniť o zotrvačné a tlmiace sily.

3.1 Rovnice dynamickej rovnováhy telesa (pohybové rovnice)

Použitím d'Alembertovho princípu možno zotrvačné sily do formulácie MKP jednoducho zahrnúť ako súčasť objemových síl. Vektor objemových síl prvku $\mathbf{f}_b^e$ (2.3-16) sa potom zmení na

$$\mathbf{f}_{b+z}^e = \int_{V_e} \mathbf{N}_e^T \left(\mathbf{b} - \rho_e \ddot{\mathbf{u}}\right) dV = \int_{V_e} \mathbf{N}^T \left(\mathbf{b} - \rho_e \mathbf{N}_e \ddot{\mathbf{a}}^e\right) dV = \int_{V_e} \mathbf{N}_e^T \mathbf{b}\, dV - \int_{V_e} \rho_e \mathbf{N}_e^T \mathbf{N}_e \ddot{\mathbf{a}}^e dV = \mathbf{f}_b^e + \mathbf{f}_z^e \qquad (3.1\text{-}1)$$

kde $\mathbf{f}_z^e$ je vektor zotrvačných síl prvku, ρ_e je hustota materiálu prvku, $\ddot{\mathbf{u}}$ je vektor zrýchlenia bodu (x, y, z) prvku a $\ddot{\mathbf{a}}^e$ je *vektor (zovšeobecnených) zrýchlení uzlových bodov prvku*

$$\ddot{\mathbf{a}}^e = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{a}}_i^e \\ \ddot{\mathbf{a}}_j^e \\ \vdots \\ \ddot{\mathbf{a}}_{NUE}^e \end{bmatrix} \qquad (3.1\text{-}2)$$

Na jednotlivých prvkoch pribudne teda objemová sila

$$\mathbf{f}_z^e = -\int_{V_e} \rho_e \mathbf{N}_e^T \mathbf{N}_e dV \ddot{\mathbf{a}}^e = -\mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{a}}^e \qquad (3.1\text{-}3)$$

kde sme zaviedli *maticu hmotnosti prvku*

$$\mathbf{M}^e = \int_{V_e} \rho_e \mathbf{N}_e^T \mathbf{N}_e dV \qquad (3.1\text{-}4)$$

Keď v (3) použijeme namiesto $\ddot{\mathbf{a}}^e$ *globálny vektor zrýchlení uzlových bodov* (kvôli jednoduchosti v ňom uvádzame len posuvné zložky zrýchlenia)

$$\ddot{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{a}}_1 \\ \ddot{\mathbf{a}}_2 \\ \vdots \\ \ddot{\mathbf{a}}_{NUT} \end{bmatrix} = \left[\ddot{u}_1, \ddot{v}_1, \ddot{w}_1, \ddot{u}_2, \ldots, \ddot{u}_{NUT}, \ddot{v}_{NUT}, \ddot{w}_{NUT}\right]^T \qquad (3.1\text{-}5)$$

dostaneme rozšírený vektor zotrvačných síl prvku a rozšírenú maticu hmotnosti prvku

$$\bar{\mathbf{f}}_z^e = -\bar{\mathbf{M}}^e \ddot{\mathbf{a}} \qquad (3.1\text{-}6)$$

Súčet rozšírených vektorov zotrvačných síl všetkých prvkov nám dá výsledný (globálny) vektor týchto síl celého telesa

$$\bar{\mathbf{f}}_z = -\sum_{e=1}^{NET} \bar{\mathbf{M}}^e \ddot{\mathbf{a}} = -\mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}} \qquad (3.1\text{-}7)$$

kde matica

$$\mathbf{M} = \sum_{e=1}^{NET} \bar{\mathbf{M}}^e \qquad (3.1\text{-}8)$$

sa nazýva *matica hmotnosti telesa.*

Zahrnutím vektora $\bar{\mathbf{f}}_z$ do rovníc (2.5-9) dostávame rovnice rovnováhy telesa i s uvažovaním zotrvačných síl v tvare

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f} \qquad (3.1\text{-}9)$$

kde zadávané hodnoty $\mathbf{f}$ i neznáme hodnoty vektorov $\mathbf{a}$, $\ddot{\mathbf{a}}$, sú funkcie času.

Tým istým postupom možno do formulácie dynamickej úlohy zaviesť aj tlmiace sily, ktoré závisia od rýchlosti. Dostaneme dynamické rovnice rovnováhy telesa v tvare

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f} \qquad (3.1\text{-}10)$$

Matica $\mathbf{C}$ sa nazýva *matica tlmenia telesa* a $\dot{\mathbf{a}}$ je vektor uzlových rýchlostí telesa. Pre maticu tlmenia prvku analogicky so (4) platí

$$\mathbf{C}^e = \int_{V_e} \kappa_e \mathbf{N}_e^T \mathbf{N}_e dV$$

Pretože je v praxi veľmi ťažké určiť parametre tlmiacich vlastností prvkov κ_e, globálna matica tlmenia $\mathbf{C}$ sa vo všeobecnosti netvorí z matíc tlmenia prvkov, ale sa obyčajne konštruuje z globálnych matíc $\mathbf{M}$ a $\mathbf{K}$. Často sa napr. predpokladá tzv. proporcionálne (Rayleighovo) tlmenie, pri ktorom matica tlmenia je lineárnou kombináciou matice hmotnosti a matice tuhosti

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K} \qquad (3.1\text{-}11)$$

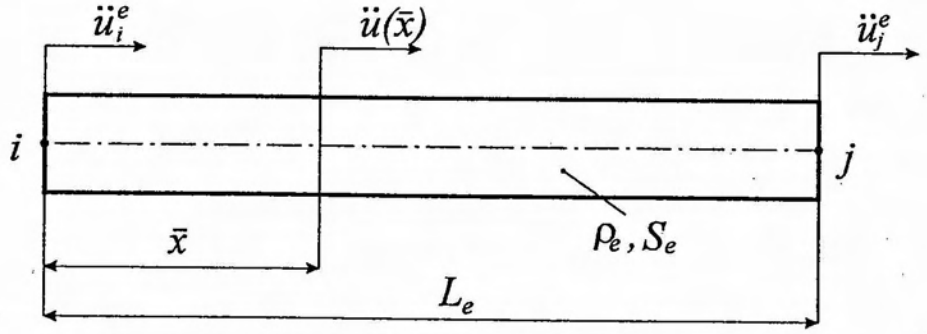
kde súčinitele α a β sa určujú experimentálne. Je to len určitá aproximácia reálneho tlmenia telesa (konštrukcie), ktoré sa vo všeobecnosti skladá z tlmenia vonkajšieho (odpor prostredia), vnútorného (materiálového) a konštrukčného (závislého od typu konštrukcie).

3.2 Matice hmotnosti

Z rovníc pre výpočet zotrvačných síl prvku

$$\mathbf{f}_Z^e = -\mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{a}}^e$$

vidíme, že matica hmotnosti prvku je štvorcová matica stupňa NVE. Pretože jej členy v súčine so zrýchleniami uzlových bodov musia dávať silu, majú rozmer hmotnosti [kg] pri súčine s posuvným zrýchlením, a rozmer rotačnej hmotnosti [kgm], pri súčine s rotačným zrýchlením uzlového bodu. Záporné znamienko vyjadruje fakt, že zotrvačné sily pôsobia *proti* zrýchlenému pohybu prvku.



Obrázok 3.1 Jednorozmerný prútový prvok

Na základe týchto poznatkov môžeme matice hmotnosti prvkov určovať aj priamo. Uvažujme napr. prútový prvok v lokálnom jednorozmernom súradnicovom systéme podľa obr. 3.1. Prvok má len dva posuvné stupne voľnosti a zrýchlenia uzlových bodov nech sú

$$\ddot{\mathbf{a}}^e = \begin{bmatrix} \ddot{u}_i^e \\ \ddot{u}_j^e \end{bmatrix}$$

Zotrvačná sila prvku je

$$f_z^e = -\rho_e S_e \int_0^{L_e} \ddot{u}(\bar{x})\, d\bar{x}$$

Jej približnú hodnotu môžeme pomocou zrýchlení uzlových bodov určiť aj bez poznania funkcie $\ddot{u}(\bar{x})$. Najjednoduchšie sa to urobí tak, že polovici hmotnosti prvku sa priradí zrýchlenie $\ddot{u}_i^e$ a druhej polovici $\ddot{u}_j^e$. Náhradné uzlové zotrvačné sily prvku potom sú

$$\mathbf{f}_z^e = \begin{bmatrix} f_i^e \\ f_j^e \end{bmatrix}_z = -\rho_e S_e L_e \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_i^e \\ \ddot{u}_j^e \end{bmatrix}$$

Určili sme tak maticu hmotnosti prvku

$$\mathbf{M}^e = M^e \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \qquad (3.2\text{- }1)$$

kde M^e je celková hmotnosť prvku.

Matice hmotnosti vytvorené takýmto spôsobom sa nazývajú *matice sústredenej (lumped) hmotnosti prvku*. Pri týchto maticiach je celková hmotnosť prvku sústredená podľa určitých zásad do uzlov. Pre určitú časť hmotnosti prvku v okolí uzla sa predpokladá konštantné zrýchlenie rovné zrýchleniu uzla. Pretože sa v takýchto maticiach neuplatňujú interpolačné hodnoty zrýchlení bodov mimo uzla, sú to *diagonálne matice*, čo potom platí aj pre výslednú maticu hmotnosti telesa. Výhodou použitia týchto matíc pri veľkých dynamických úlohách s menšími nárokmi na presnosť riešenia je potom úspora strojového času.

Pomocou matice interpolačných funkcií prvku možno jeho maticu hmotnosti určiť zo vzťahu (3.1.4). Na aproximáciu zmeny zrýchlenia v objeme prvku sa využíva tá istá matica $\mathbf{N}^e$ ako pri posunutiach, a preto takto určené matice sa nazývajú matice konzistentenej (*consistent*) hmotnosti.

Pre prútový prvok na obr. 3.1 je matica interpolačných funkcií (2.6- 7)

$$\mathbf{N}^e = \begin{bmatrix} 1-\dfrac{\bar{x}}{L_e} & \dfrac{\bar{x}}{L_e} \end{bmatrix}$$

a podľa (3.1- 4) dostávame maticu hmotnosti

$$\mathbf{M}^e = \rho_e S_e \int_0^{L_e} \begin{bmatrix} 1-\dfrac{\bar{x}}{L_e} \\ \dfrac{\bar{x}}{L_e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-\dfrac{\bar{x}}{L_e} & \dfrac{\bar{x}}{L_e} \end{bmatrix} d\bar{x} = M_e \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} \qquad (3.2\text{- }2)$$

Na rozdiel od matice (1) dostávame plnú maticu. Analogicky ako matice tuhosti, sú aj matice konzistentnej hmotnosti prvku i telesa symetrické.

Ak matice hmotnosti prvkov určujeme v lokálnom súradnicovom systéme, treba ich pred tvorbou výslednej matice hmotnosti telesa transformovať do globálneho súradnicového systému podľa tých istých zásad a vzťahov ako v prípade matíc tuhosti.

3.3 Výpočet vlastných frekvencií a vlastných tvarov kmitania

Každé pružné teleso (konštrukciu) možno rozkmitať tak, že bude kmitať harmonicky. Pre časovú závislosť posunutí uzlových bodov takto rozkmitaného lineárneho modelu MKP telesa bez tlmenia môžeme napísať

$$\mathbf{a}(t) = \boldsymbol{\phi} \sin \omega t \qquad (3.3\text{- }1)$$

kde

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \cdots & \phi_{NVT} \end{bmatrix}^T \qquad (3.3\text{- }2)$$

je vektor, ktorý obsahuje veľkosť amplitúd zložiek kmitania uzlových bodov výpočtového modelu a ω je kruhová frekvencia kmitania. Tento voľný kmitavý pohyb charakterizuje dynamické vlastnosti telesa a závisí od hmotnosti a tuhosti telesa. Amplitúdy kmitania nebudú závisieť od času, ale len od začiatočného impulzu, ktorý takéto kmitanie vyvolal. Frekvencia ω, pri ktorej teleso kmitá podľa (1), sa nazýva *vlastná kruhová frekvencia* a vektor $\boldsymbol{\phi}$ *vlastný tvar (mód) kmitania* telesa.

Poznanie vlastných frekvencií telies má význam pri analýze ich (obyčajne nežiaducich) rezonančných vlastností. Na poznaní vlastných tvarov a frekvencií je založená aj jedna z efektívnych metód výpočtu nestacionárnej silovej ozvy telies, tzv. metóda superpozície vlastných tvarov kmitania.

Po rozkmitaní telesa bez tlmenia už naň nepôsobia žiadne vonkajšie sily, a preto do rovníc (3.1.9)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f}$$

môžeme dosadiť $\mathbf{f} = \mathbf{0}$. Ak do takto upravených (homogénnych) rovníc dosadíme z (1) $\mathbf{a}$ a $\ddot{\mathbf{a}}$, dostaneme od času nezávislé rovnice voľného kmitania

$$\left(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}\right)\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0} \qquad (3.3\text{-}3)$$

Rovnice (3) budú mať nenulové riešenie pre $\boldsymbol{\phi}$, ak determinant matice koeficientov bude rovný nule

$$\left|\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}\right| = 0 \qquad (3.3\text{-}4)$$

Vzhľadom na to, že sme rovnice (3) zostavili z rovníc (3.1.9), ktoré platia pre neupevnené teleso, matica $\mathbf{K}$ je singulárna a podmienka (4) je splnená aj pre $\omega = 0$. Vtedy sa teleso môže posúvať (natáčať) ako tuhý celok a rovnice (3) s prihliadnutím na (1) sa zmenia na

$$\mathbf{K}\mathbf{a}_{\text{tuh. telesa}} = \mathbf{0} \qquad (3.3\text{-}5)$$

Pri hľadaní *nenulových* hodnôt vlastných frekvencií, podobne ako pri statickej úlohe MKP, sa matice v (3) a (4) redukujú tak, že sa v nich vynechajú riadky a stĺpce zodpovedajúce odstráneným stupňom voľnosti telesa a dostávame

$$\left(\tilde{\mathbf{K}} - \omega^2\tilde{\mathbf{M}}\right)\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0} \qquad (3.3\text{-}6)$$

Z matematického hľadiska rovnica (6) predstavuje tzv. zovšeobecnený problém vlastných čísiel a má nenulové riešenie len vtedy, keď platí

$$\left|\tilde{\mathbf{K}} - \omega^2\tilde{\mathbf{M}}\right| = 0 \qquad (3.3\text{-}7)$$

Determinant v (7) má tvar

$$\begin{vmatrix} k_{11} - \omega^2 m_{11} & k_{12} - \omega^2 m_{12} & \cdots & k_{1n} - \omega^2 m_{1n} \\ k_{21} - \omega^2 m_{21} & k_{22} - \omega^2 m_{22} & \cdots & k_{2n} - \omega^2 m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n1} - \omega^2 m_{n1} & k_{n2} - \omega^2 m_{n2} & \cdots & k_{nn} - \omega^2 m_{nn} \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.3\text{-}8)$$

kde k_{ij} sú členy matice $\mathbf{K}$ a m_{ij} matice $\mathbf{M}$.

Rozpísaním determinantu (8) dostaneme algebrickú rovnicu stupňa n pre výpočet ω^2. Korene tejto rovnice predstavujú vo všeobecnosti n vlastných čísiel sústavy rovníc (6), v tomto prípade n kvadrátov vlastných uhlových frekvencií telesa

$$\omega_1^2, \omega_2^2, \cdots, \omega_i^2, \cdots, \omega_n^2$$

ktoré možno postupmi riešenia úloh vlastných čísiel určiť. Ľubovoľnej frekvencii ω_i možno potom zo vzťahu (6) priradiť vektor $\boldsymbol{\phi}_i$ - vlastný tvar kmitania telesa pri tejto frekvencii.

Zo sústavy rovníc (6) je zrejmé, že ak $\boldsymbol{\phi}_i$ je jej riešením, potom aj $c\boldsymbol{\phi}_i$ je riešením pri ľubovoľnej hodnote čísla c. Fyzikálne to znamená, že amplitúdy voľného kmitania môžu mať (teoreticky) ľubovoľnú hodnotu v závislosti od veľkosti začiatočného impulzu, ktorý vyvolal tento pohyb. Pri výpočte aplitúd $\boldsymbol{\phi}_i$ sústavy (3) so známou hodnotou ω_i potom postupujeme tak, že ich normujeme; napr. tak, že postavíme $\phi_n = 1$. Pri takomto normovaní potom hodnoty amplitúd vo vlastnom tvare kmitania sú

$$\boldsymbol{\phi}_i = \left[\frac{\phi_{i1}}{\phi_{in}} \quad \frac{\phi_{i2}}{\phi_{in}} \quad \cdots \quad \frac{\phi_{in-1}}{\phi_{in}} \quad 1 \right]^T \tag{3.3- 9}$$

Vo vypočítanom vlastnom tvare je teda relatívny pomer amplitúd správny, absolútne hodnoty sú však závislé od spôsobu ich normovania.

Pri riešení dynamických úloh pomocou metódy superpozície vlastných tvarov je potrebné normovať každý vlastný tvar tak, aby platilo

$$\boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_i = 1 , \qquad i = 1, 2, \ldots , n \tag{3.3- 10}$$

Zo vzťahu (10) vidieť, že to možno dosiahnúť tak, že vlastný tvar vynásobíme číslom

$$\frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_i}} \tag{3.3- 11}$$

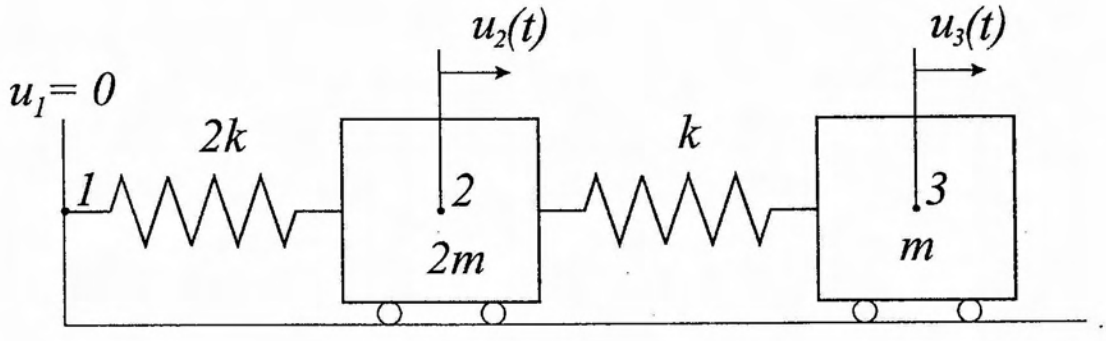
Ďalšou užitočnou vlastnosťou vlastných tvarov, ktorá sa využíva pri uvedenej metóde, je ich ortogonálnosť vzhľadom na **K** i **M**. Ľahko sa dá dokázať, že pre dva ľubovoľné rozdielne vlastné tvary platí

$$\boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_j = 0 \qquad i \neq j \tag{3.3- 12}$$

$$\boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_j = 0 \qquad i \neq j \tag{3.3- 13}$$

Príklad 3.1

Pre jednorozmernú netlmenú dvojhmotovú sústavu s dvomi pružinami na obr. 3.2 vypočítajte vlastné frekvencie a vlastné tvary kmitania. Dané je: $k = 128\ \mathrm{Nm^{-1}}$, $m = 1$ kg.



Obrázok 3.2

Je to sústava s tromi uzlami a dvomi jednorozmernými prvkami – pružinami s tuhosťami $2k$ a k. Matica tuhosti lineárnej pružiny je totožná s maticou prútového prvku (1.3- 1), len tuhosť prúta ($E_e S_e / L_e$) nahradzujeme tuhosťou pružiny.

Maticu tuhosti sústavy vypočítame ako súčet rozšírených matíc prvkov

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2k & -2k & 0 \\ -2k & 2k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k & -2k & 0 \\ -2k & 3k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix}$$

Hmotnosti pružín zanedbáme, takže matica hmotnosti sústavy obsahuje len udané uzlové hmotnosti

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

Pre určenie nenulových hodnôt vlastných uhlových frekvencií platí podmienka (3.3- 7) zohľadňujúca okrajové podmienky (v našom prípade $u_1 = 0$)

$$\left| \begin{bmatrix} 3k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \right| = 0$$

Jej rozpísaním dostaneme kvadratickú rovnicu

$$2m^2 \left(\omega^2\right)^2 - 5km\omega^2 + 2k^2 = 0$$

a z nej dve hodnoty vlastných uhlových frekvencií sústavy

$$\omega_1 = \sqrt{0{,}5k/m} = 8\ s^{-1}$$
$$\omega_2 = \sqrt{2k/m} = 16\ s^{-1}$$

resp. dve hodnoty vlastných frekvencií

$$f_1 = \omega_1 / (2\pi) = 1{,}273\ \text{Hz}$$
$$f_2 = \omega_2 / (2\pi) = 2{,}546\ \text{Hz}$$

Zo vzťahu (3.3- 6) aplikovaného na náš prípad

$$\left(\begin{bmatrix} 3k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} - \omega_i^2 \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \phi_{2i} \\ \phi_{3i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

určíme teraz dva vlastné tvary kmitania sústavy. Zvolíme normovanie $\phi_{3i} = 1$, pri ktorom dostávame

$$\boldsymbol{\phi}_1 = \begin{bmatrix} \phi_{21} \\ \phi_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \boldsymbol{\phi}_2 = \begin{bmatrix} \phi_{22} \\ \phi_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Podľa (3.3- 12) a (3.3- 13) sa možno ľahko presvedčiť, že tieto tvary majú ortogonálne vlastnosti vzhľadom na **K** i **M**.

Normovanie vzhľadom na **M** dáva tieto číselné hodnoty vlastných tvarov (na štyri platné čísla)

$$ {}^{M}\phi_1 = \begin{bmatrix} 0,4082 \\ 0,8165 \end{bmatrix}; \qquad {}^{M}\phi_2 = \begin{bmatrix} -0,5774 \\ 0,5774 \end{bmatrix} $$

Takto normované vlastné tvary spĺňajú aj podmienku (3.3- 10).

Príklad 3.2

Riešte úlohu z predchádzajúceho príkladu pomocou programu ANSYS.

1. Zadanie názvu úlohy
Utility Menu>File>Change Jobname..., /MODAL_2HMOTY, OK;

2. Otvorenie predprocesora
ANSYS Main Menu>Preprocessor;

3. Zadanie typu prvkov pre úlohu
Preprocessor>Element Type>Add/Edit/Delete, Add..., Combination Spring-damper 14, OK, Add..., Structural Mass, 3D Mass 21, OK, Close;

4. Zadanie štyroch prvkových konštánt
Preprocessor>Real Constants>Add/Edit/Delete, Add..., Typ 1 COMBIN14, OK, K = 256, OK, *Add...*, Typ 1 COMBIN14, OK, K=128, OK, *Add...*, Typ 2 MASS21, OK, MASSX=2, OK, *Add...*, Typ 2 MASS21, OK, MASSX=1, OK, Close;

5. Zapnutie trvalého číslovania uzlových bodov kvôli kontrole
*Utility Menu>PlotCtrls>Numbering...*NODE=ON, OK;

6. Vytvorenie uzlových bodov úlohy (číslovanie je automatické)
Preprocessor>Modeling>Create>Nodes>In Active CS..., X = 0, Y = 0, Apply, X = 1, Y = 0, Apply, X = 2, Y = 0, OK;

7. Aktualizácia údajov pre prvý pružinový prvok
Preprocessor>Modeling>Create>Elements>Elem Attributes, Typ 1 COMBIN14, REAL=1, OK;

8. Vytvorenie prvého pružinového prvku
Preprocessor>Modeling>Create>Elements>Auto Numbered>Thru Nodes P: Uzol 1, P: Uzol 2, OK;

9. Aktualizácia údajov pre druhý pružinový prvok
Preprocessor>Modeling>Create>Elements>Elem Attributes, Typ 1 COMBIN14, REAL = 2, OK;

10. Vytvorenie druhého pružinového prvku
Preprocessor>Modeling>Create>Elements>Auto Numbered>Thru Nodes P: Uzol 2, P: Uzol 3, OK;

11. Aktualizácia údajov pre prvý prvok bodovej hmotnosti
Preprocessor>Modeling>Create>Elements>Elem Attributes, Typ 2 MASS 21, REAL=3, OK;

12. Vytvorenie prvého prvku bodovej hmotnosti
Preprocessor>Modeling>Create>Elements>Auto Numbered>Thru Nodes P: Uzol 2, OK;

13. Aktualizácia údajov pre druhý prvok bodovej hmotnosti
Preprocessor>Modeling>Create>Elements>Elem Attributes, Typ 2 MASS 21,
REAL=4, OK;

14. Vytvorenie druhého prvku bodovej hmotnosti
Preprocessor>Modeling>Create>Elements>Auto Numbered>Thru Nodes P: Uzol 3, OK;

15. Ukončenie práce v predprocesore
Preprocessor>Finish;

16. Upevnenie uzla č. 1
Ansys Main Menu>Solution>Define Loads>Apply>Structural>Displacement>On Nodes
P: Uzol 1, OK,All DOF, OK;

17. Zadanie typu analýzy
Solution>Analysis Type>New Analysis, Modal, OK;

18. Nastavenie volieb pre analýzu
Solution>Analysis Type>Analysis Options, No. of modes to extract = 2,
Expand mode shapes = YES,
NMODE = 2, OK,
Nrmkey = To mass matrix, OK;

19. Výpočet úlohy
Solution>Solve>Current LS, OK;

20. Ukončenie práce v *Solution*
ANSYS Main Menu>Finish;

21. Vypísanie hodnôt vlastných frekvencií
ANSYS Main Menu>General Postprocessor>Results Summary;

SET	TIME/FREQ	LOAD STEP	SUBSTEP	CUMULATIVE
1	1.2732	1	1	1
2	2.5465	1	2	2

22. Amplitúdy kmitania pri prvej vlastnej frekvencii
General Postprocessor>Read Results>First Set;
General Postprocessor>List Results>Nodal Solution>DOF Solution, Translation UX, OK;

```
LOAD STEP=      1  SUBSTEP=      1
FREQ=     1.2732

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN GLOBAL COORDINATES

  NODE        UX
     1    0.0000
     2   0.40825
     3   0.81650
```

22. Amplitúdy kmitania pri druhej vlastnej frekvencii
General Postprocessor>Read Results>Next Set;
General Postprocessor>List Results>Nodal Solution>DOF Solution, Translation UX, OK;

```
LOAD STEP=      1  SUBSTEP=      2
FREQ=     2.5465
```

```
THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN GLOBAL COORDINATES

 NODE       UX
    1   0.0000
    2 -0.57735
    3  0.57735
```

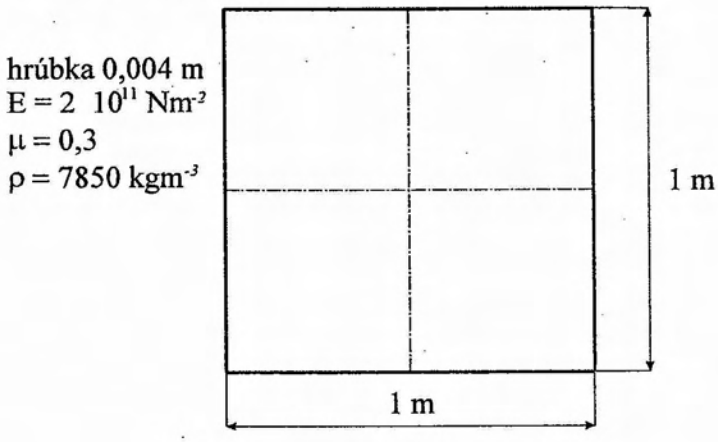
23. Ukončenie práce s úlohou
Ansys Toolbar>Quit>Save Geom+Loads, OK;

Poznámka k príkladu 3.2

Hodnoty amplitúd vlastného kmitania pri normovaní s najväčšou amplitúdou, ktorá sa rovná jednej, by sme dostali, keby sme v príkaze č. 18 zadali voľbu *Nrmkey = To unity.* Pravda, pokiaľ chceme výsledky z modálnej analýzy použiť pri ďalšej dynamickej analýze telesa, musíme vlastné tvary vždy normovať vzhľadom na maticu hmotnosti, tak, ako to bolo urobené v príklade.

Príklad 3.3

Pre štvorcovú dosku s rozmermi podľa obrázku 3.3 vypočítajte šesť najnižších vlastných frekvencií a vlastných tvarov kmitania. Doska je po celom obvode votknutá. Hodnoty modulu pružnosti v ťahu E, Poissonovho čísla μ a hustoty materiálu ρ sú udané v obrázku.



Obrázok 3.3

1. Zadanie názvu úlohy
Utility Menu>File>Change Jobname..., /MODAL_DOSKA, OK;

2. Otvorenie predprocesora
ANSYS Main Menu>Preprocessor;

3. Zadanie typu prvkov pre úlohu
Preprocessor>Element Type>Add/Edit/Delete, Add..., Shell 8 node 93, OK, Close;

4. Zadanie hrúbky dosky
Preprocessor>Real Constants>Add/Edit/Delete, Add..., Typ 1 SHELL 93, OK, TK(I) = 0.004, OK, Close;

5. Materiálové údaje
Preprocessor>Material Props>Material Models>Structural>Linear>Elastic>Isotropic ...
EX = 2e11, PRXY = 0.3, OK,>*Density* DENS = 7850, OK>*Material>Exit*;

6. Vytvorenie stredovej plochy dosky
Preprocessor>Modeling>Create>Areas>Rectangle>By Dimensions... X1 = 0, X2 = 1, Y1 = 0, Y2 = 1, OK;

7. Vytvorenie siete 20 x 20 prvkov
Preprocessor>Meshing>Size Cntrls>ManualSize>Global>Size... SIZE = 0.05, OK;
Preprocessor>Meshing>Mesh>Areas>Mapped>3 or 4 sided... Pick All;

8. Ukončenie práce v predprocesore
Preprocessor>Finish;

9. Votknutie okrajov dosky
Ansys Main Menu>Solution>Define Loads>Apply>Structural>Displacement>On Lines...
Pick All, All DOF, OK;

10. Zadanie typu analýzy
Solution>Analysis Type>New Analysis... Modal, OK;

11. Nastavenie volieb pre analýzu
Solution>Analysis Type>Analysis Options... No. of modes to extract = 6,
Expand mode shapes = YES,
NMODE = 6, OK,
Nrmkey = To mass matrix, OK;

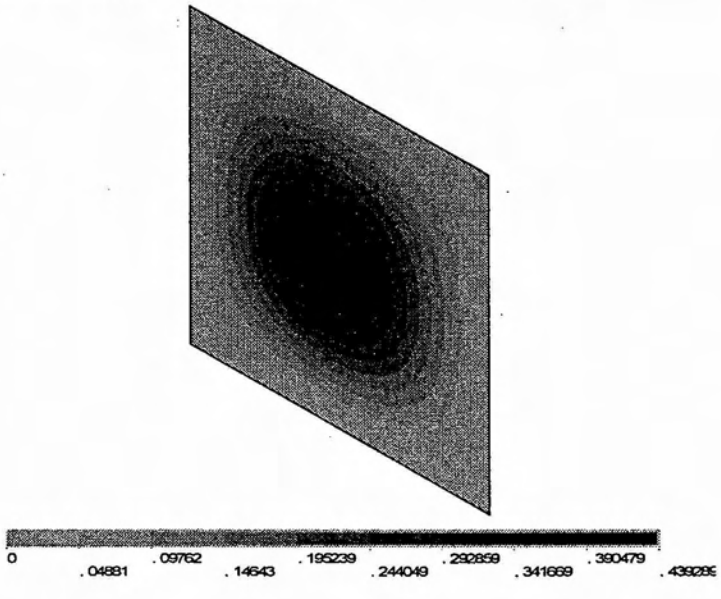
12. Výpočet úlohy
Solution>Solve>Current LS, OK;

13. Ukončenie práce v *Solution*
ANSYS Main Menu>Finish;

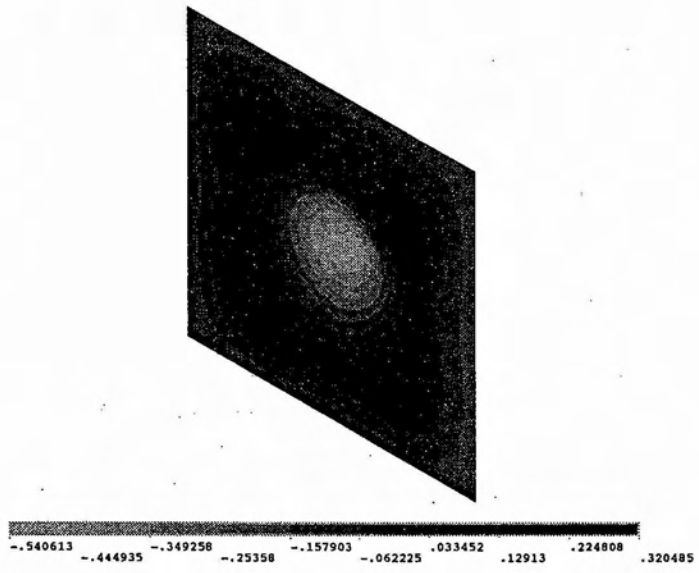
14. Vypísanie hodnôt vlastných frekvencií
ANSYS Main Menu>General Postprocessor>Results Summary;

SET	TIME/FREQ	LOAD STEP	SUBSTEP	CUMULATIVE
1	34.982	1	1	1
2	71.337	1	2	2
3	71.337	1	3	3
4	105.17	1	4	4
5	127.87	1	5	5
6	128.49	1	6	6

15. Zobrazenie prvého vlastného tvaru
General Postprocessor>Read Results>First Set;
General Postprocessor>Plot Results>Contour Plot>Nodal Solu.. DOF Solution, Translation UZ, OK;
Utility Menu>PlotCtrls>Pan Zoom Rotate... Iso;



15. Zobrazenie šiesteho vlastného tvaru
General Postprocessor>Read Results>Last Set;
Utility Menu>Plot>Contour Plot>Replot;



16. Ukončenie práce s úlohou
*Ansys Toolbar>Quit>*Save Geom+Loads, OK;

3.4 Metódy priamej integrácie pohybových rovníc

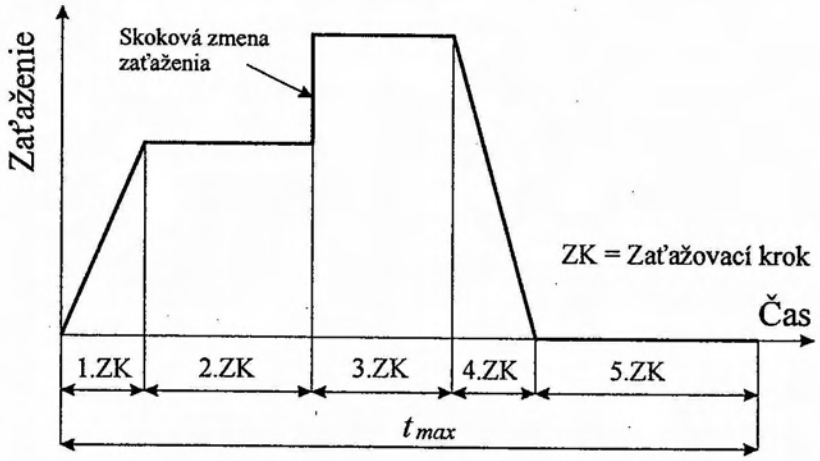
Pre systém konečných prvkov namáhaný nestacionárnym vonkajším zaťažením platia rovnice (3.1– 10)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}}(t)+\mathbf{C}\dot{\mathbf{a}}(t)+\mathbf{K}\mathbf{a}(t)=\mathbf{f}(t) \qquad (3.4-1)$$

ktoré z matematického hľadiska predstavujú sústavu lineárnych diferenciálnych rovníc druhého rádu s konštantnými koeficientami a neznámymi funkciami $\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ddot{\mathbf{a}}$. Pri použití metód priamej integrácie sa rovnice (1) integrujú numericky „krok za krokom" v danom časovom intervale $< 0,\ t_{max} >$. Prívlastok „priama" hovorí, že pred integráciou sa nerobí žiadna transformácia týchto rovníc do inej (vhodnejšej) formy. Rovnice (1) sa pri tom neusilujeme splniť v každom časovom okamžiku t, ale len vo vybraných (diskrétnych) časových okamihoch, ktoré nám určuje zvolený *časový krok* Δt. Ku geometrickej diskretizácii úlohy pribudla teda časová diskretizácia, a rovnako, ako pri statickej úlohe, nehľadáme neznáme funkcie, ale len ich hodnoty vo vybraných geometrických a časových bodoch. V časových bodoch uvažujeme vlastne statickú rovnováhu síl (elastických, zotrvačných, tlmiacich a vonkajších) pôsobiacich na teleso a môžeme preto značne využívať postupy a algoritmy osvedčené pri statickej analýze.

Ďalším znakom týchto metód je, že v intervale Δt sa zavádzajú dva predpoklady o tom, ako sú v ňom na sebe závislé uvedené tri neznáme funkcie $\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ddot{\mathbf{a}}$. Je to nevyhnutné, pretože ak sa pozrieme na (1) ako na maticovú rovnicu, vidíme, že máme jednu rovnicu, ale tri neznáme. Je zrejmé, že od oprávnenosti a kvality tohto predpokladu závisí presnosť a numerická stabilita použitej metódy. Intuitívne tiež cítime, že pri takomto postupe by časový krok mal byť dostatočne malý, a to najmä pri tuhých sústavách, ktorých vlastné frekvencie sú vysoké.

Skôr ako začneme hovoriť o spôsobe výpočtu neznámych, všimnime si pravú stranu sústavy (1), ktorú, podobne ako pri statickej úlohe, tvorí vektor zaťaženia uzlových bodov telesa. Pri statickej úlohe stačilo zadať konečné hodnoty týchto síl, pri dynamickej úlohe sú však tieto hodnoty časovo závislé a ich priebeh musíme zadať pre celý časový interval $< 0, t_{max} >$. V programoch MKP sa to väčšinou robí tak, že v závislosti od známej časovej zmeny síl sa tento interval rozdelí na potrebný počet častí, tzv. zaťažujúcich krokov (*load steps*), v ktorých sa predpokladá, že sa sily menia buď skokom (*stepped change*) alebo lineárne (*ramped change*) – pozri obrázok 3.4. Pri takomto postupe potom stačí pre každý zaťažovací krok zadať len čas na jeho konci a hodnoty síl v tomto čase. Pritom sa obyčajne pre každý zaťažovací krok zadáva aj veľkosť integračného časového kroku Δt, od ktorého závisí presnosť riešenia úlohy v príslušnom časovom úseku, a ktorý môže byť v každom zaťažovacom kroku rôzny. Sily pre zaťažovacie kroky sa postupne zadávajú a ukladajú do diskovej pamäti, a tak sa vytvorí časovo premenlivé zaťaženie pre celú úlohu. Tento postup sa, samozrejme, výrazne zjednoduší v prípade harmonickej zmeny zaťažujúcich síl (pozri odsek 3.7).



Obrázok 3.4

Pravá strana rovníc (1) je teda pre každý zaťažovací krok známa, poznáme, prirodzene, aj začiatočné podmienky úlohy

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t=0) &= \mathbf{a}_0 \\ \dot{\mathbf{a}}(t=0) &= \dot{\mathbf{a}}_0 \\ \ddot{\mathbf{a}}(t=0) &= \mathbf{0} \end{aligned} \qquad (3.4\text{-}2)$$

a máme nájsť riešenie rovníc (1) v čase od 0 po t_{max}. Uvažovaný časový interval rozdelíme na zaťažovacie kroky, ktoré na seba časovo nadväzujú, a i-ty zaťažovací krok na n rovnakých integračných časových krokov Δt (tj. $\Delta t = t_{imax}/n$), pričom riešenie budeme hľadať v časoch $\Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, ..., t, t+\Delta t, ..., t_{imax}$. Je zrejmé, že algoritmus, ktorý vyjadrí riešenie v čase $t+\Delta t$ pomocou hodnôt v čase t, bude schopný riešiť úlohu v celom uvažovanom časovom intervale úlohy.

Používané algoritmy, resp. metódy priamej integrácie, možno rozdeliť do dvoch základných skupín: *explicitné a implicitné*. Pri explicitných metódach na základe predpokladov o závislosti hodnôt $\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ddot{\mathbf{a}}$ v časovom kroku vyjadríme rovnice (1) pre čas t a z nich vypočítame $\mathbf{a}_{t+\Delta t}$. Rovnice pre výpočet $\dot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t}$, $\ddot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t}$ sú dané zvolenými

predpokladmi príslušnej metódy. Pri implicitných metódach postupujeme obdobne, ale rovnice rovnováhy sa napíšu pre čas $t+\Delta t$. Pri oboch postupoch dostaneme zo sústavy diferenciálnych rovníc (1) sústavu obyčajných algebrických rovníc, ktorú potom riešime rovnako ako pri statickej úlohe. Pri explicitných metódach matica tejto sústavy neobsahuje maticu tuhosti (len maticu hmotnosti), a preto sú tieto metódy efektívne predovšetkým pri úlohách s diagonálnymi maticami sústredenej hmotnosti. V takom prípade je riešenie i veľmi veľkej sústavy rovníc s veľkým počtom časových krokov jednoduché a rýchle. Implicitné metódy sú vhodné pri riešení úloh kde vyžadujeme presnosť riešenia a používame matice konzistentnej hmotnosti. Ich ďalšou výhodou je to, že sú, na rozdiel od explicitných metód, nepodmienečne stabilné (konvergencia – ale nie dostatočná presnosť – je zaručená aj pri veľkom časovom kroku).

V programoch MKP sa najčastejšie využívajú tieto metódy priamej integrácie pohybových rovníc (napr. [8]):

- metóda stredovej diferencie
- Houboltova metóda
- Wilsonova θ-metóda
- Newmarkova metóda

Prvá metóda je explicitná, ostatné tri sú implicitné metódy. V súčasnosti si dominantné postavenie medzi implicitnými metódami udržuje Newmarkova metóda (napr. program ANSYS využíva len túto implicitnú metódu).

3.4.1 Newmarkova metóda

V Newmarkovej metóde sa zavádzajú tieto predpoklady pre závislosť vyšetrovaných veličín v časovom kroku

$$\dot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{a}}_t + \left[(1-\delta)\ddot{\mathbf{a}}_t + \delta\ddot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t}\right]\Delta t \tag{3.4-3}$$

$$\mathbf{a}_{t+\Delta t} = \mathbf{a}_t + \dot{\mathbf{a}}_t\Delta t + \left[(1/2-\alpha)\ddot{\mathbf{a}}_t + \alpha\ddot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t}\right]\Delta t^2 \tag{3.4-4}$$

Rovnice i parametre α a δ majú jasný fyzikálny význam. Ak zvolíme $\delta = 1/2$ a $\alpha = 1/6$, dostaneme metódu lineárneho zrýchlenia; pri $\delta = 1/2$ a $\alpha = 1/4$ je to metóda konštantného priemerného zrýchlenia, ako to vidieť z prvej rovnice, ktorá vtedy nadobudne tvar

$$\dot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{a}}_t + \frac{\ddot{\mathbf{a}}_t + \ddot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t}}{2}\Delta t$$

Ak zo vzťahov (3) a (4) vyjadríme vektory $\ddot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t}$, $\dot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t}$ a dosadíme ich do rovníc rovnováhy (1) vyjadrenej pre čas $t+\Delta t$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t} + \mathbf{K}\mathbf{a}_{t+\Delta t} = \mathbf{f}_{t+\Delta t} \tag{3.4-5}$$

dostaneme po úprave sústavu obyčajných rovníc

$$\hat{\mathbf{K}}\mathbf{a}_{t+\Delta t} = \hat{\mathbf{f}}_{t+\Delta t} \tag{3.4-6}$$

z ktorej určujeme posunutia uzlových bodov telesa v čase $t+\Delta t$. Matica koeficientov sústavy $\hat{\mathbf{K}}$ (7) sa nazýva matica modifikovanej (efektívnej) tuhosti a vektor pravých strán sústavy $\hat{\mathbf{f}}$ (8) je vektor modifikovaného zaťaženia telesa. Obsahujú len známe veličiny, ako vidieť z ich rozpisu uvedenom v nasledujúcom algoritme metódy.

Schematický algoritmus použitia Newmarkovej metódy v MKP

A) ÚVODNÉ VÝPOČTY (robia sa len raz)

1. Zostavenie matice tuhosti $\mathbf{K}$, matice hmotnosti $\mathbf{M}$, a matice tlmenia $\mathbf{C}$.
2. Určenie začiatočných podmienok $\mathbf{a}_0, \dot{\mathbf{a}}_0\ \ddot{\mathbf{a}}_0$.
3. Voľba (zadanie) parametrov α a δ metódy a vyčíslenie konštánt v rovnici (6)

$$\delta \geq 0{,}50, \quad \alpha \leq 0{,}25(0{,}5+\delta)^2, \quad k_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2}, \quad k_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t}, \quad k_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t}$$

$$k_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1, \quad k_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1, \quad k_5 = \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\delta}{\alpha} - 2\right), \quad k_6 = \Delta t(1-\delta), \quad k_7 = \delta \Delta t$$

4. Zostavenie modifikovanej matice tuhosti

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + k_0\mathbf{M} + k_1\mathbf{C} \tag{3.4- 7}$$

5. Faktorizácia (triangularizácia) $\hat{\mathbf{K}}$ - pozri časť 3.5

B) VÝPOČTY PRE KAŽDÝ ČASOVÝ KROK (cyklus od 1 po celkový počet časových krokov)

1. Zostavenie modifikovaného vektora pravých strán

$$\hat{\mathbf{f}}_{t+\Delta t} = \mathbf{f}_{t+\Delta t} + \mathbf{M}\left(k_0\mathbf{a}_t + k_2\dot{\mathbf{a}}_t + k_3\ddot{\mathbf{a}}_t\right) + \mathbf{C}\left(k_1\mathbf{a}_t + k_4\dot{\mathbf{a}}_t + k_5\ddot{\mathbf{a}}_t\right) \tag{3.4- 8}$$

2. Výpočet posunutí uzlových bodov v čase $t + \Delta t$ zo sústavy rovníc (6)

$$\hat{\mathbf{K}}\mathbf{a}_{t+\Delta t} = \hat{\mathbf{f}}_{t+\Delta t}$$

3. Výpočet zrýchlení a rýchlostí v čase $t + \Delta t$ z upravených vzťahov (3) a (4)

$$\ddot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t} = k_0\left(\mathbf{a}_{t+\Delta t} - \mathbf{a}_t\right) - k_2\dot{\mathbf{a}}_t - k_3\ddot{\mathbf{a}}_t \tag{3.4- 9}$$

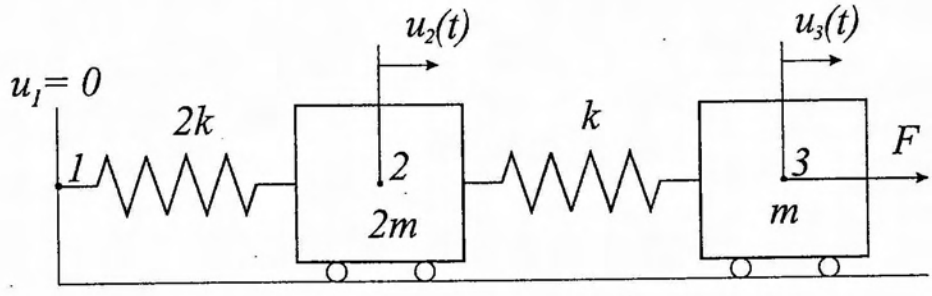
$$\dot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{a}}_t + k_6\ddot{\mathbf{a}}_t + k_7\ddot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t} \tag{3.4- 10}$$

4. Opakovanie algoritmu pre ďalší časový krok

V ižinierskych aplikáciách MKP na riešenie dynamických úloh nie sú neobvyklé úlohy, keď stupeň matice $\hat{\mathbf{K}}$ je niekoľko sto tisíc a počet časových krokov niekoľko tisíc. V podstate to znamená, že treba riešiť sústavu niekoľko sto tisíc rovníc niekoľko tisíckrát. Je pochopiteľné, že ak sme v súčasnosti už schopní v prijateľnom čase riešiť takéto nepríjemné úlohy aj na bežných personálnych počítačoch, musia byť algoritmy a programy MKP veľmi efektívne vybudované a musia maximálne využívať vlastnosti matíc, ktoré vstupujú do procesu numerického riešenia úlohy. Niektoré základné informácie z tejto problematiky uvádzame v nasledujúcom odstavci. Najprv však na jednoduchom príklade ukážeme praktické použitie Newmarkovej metódy na výpočet nestacionárnych pevnostných úloh.

Príklad 3.4

Jednorozmernú netlmenú dvojhmotovú sústavu s dvomi pružinami na obr. 3.5 zaťažíme v uzlovom bode č. 3 statickou silou F, ktorú potom v čase $t = 0$ náhle odstránime. Newmarkovou metódou treba určiť časové priebehy posunutí bodov 2 a 3 v intervale 0 až t_{max}, keď je dané: $k = 128\ \mathrm{Nm^{-1}}$, $m = 1$ kg, $F = 10$ N, $t_{max} = 1$ sekunda; parametre metódy zvoľte $\alpha = 0{,}25$; $\delta = 0{,}5$ a integračný krok $\Delta t = 0{,}1$ sek.



Obrázok 3.5

Rovnako ako v príklade 3.1 maticu tuhosti sústavy vypočítame ako súčet rozšírených matíc prvkov

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2k & -2k & 0 \\ -2k & 2k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k & -2k & 0 \\ -2k & 3k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix}$$

Hmotnosti pružín zanedbáme, takže matica hmotnosti sústavy obsahuje len udané uzlové hmotnosti

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

Pretože neuvažujeme tlmenie, pre úlohu platí systém diferenciálnych rovníc (3.1 –9)

$$\mathbf{M\ddot{a} + Ka = f}$$

Po vyčíslení matíc v tejto sústave a zavedení okrajovej podmienky $u_1(t) = 0$ dostaneme sústavu dvoch diferenciálnych rovníc

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_2(t) \\ \ddot{u}_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 384 & -128 \\ -128 & 128 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(a)}$$

Pretože sme sústavu staticky vychýlili z rovnovážnej polohy silou $F = 10$ N a z tejto ustálenej polohy ju uvoľníme, máme nulové začiatočné rýchlosti i zrýchlenia

$$\dot{\mathbf{a}}(t = 0) = \mathbf{0}$$
$$\ddot{\mathbf{a}}(t = 0) = \mathbf{0}$$

ale začiatočné posunutia sú nenulové. Vypočítame ich zo sústavy (a), kde pre statické zaťaženie platí

$$\begin{bmatrix} 384 & -128 \\ -128 & 128 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2(t = 0) \\ u_3(t = 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

a dostávame začiatočné podmienky pre posunutie

$$u_2(t=0)=0,0391\ m$$
$$u_3(t=0)=0,1172\ m$$

Teraz už budeme postupovať podľa uvedeného algoritmu metódy. Najprv vyčíslime konštanty k pre zvolený časový krok:

i	0	1	2	3	4	5	6	7
k_i	400	20	40	1	1	0	0,05	0,05

Modifikovaná matica tuhosti je

$$\hat{\mathbf{K}}=\mathbf{K}+k_0\mathbf{M}=\begin{bmatrix}1184 & -128\\ -128 & 528\end{bmatrix}$$

Jej inverzia sa robí len jedenkrát

$$\hat{\mathbf{K}}^{-1}=10^{-4}\begin{bmatrix}8,6733 & 2,1026\\ 2,1026 & 19,4991\end{bmatrix}$$

Pre všetky časové kroky teraz vyčíslime hodnoty podľa horeuvedeného algoritmu. Pre čas 0,1 sek. zo začiatočných podmienok dostávame:

Modifikovaný vektor zaťaženia

$$\hat{\mathbf{f}}(0,1)=\mathbf{f}(0,1)+\mathbf{M}\left[k_0\mathbf{a}(0)+k_2\dot{\mathbf{a}}(0)+k_3\ddot{\mathbf{a}}(0)\right]=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\left(400\begin{bmatrix}0,0391\\0,1172\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}31,2500\\46,8750\end{bmatrix}$$

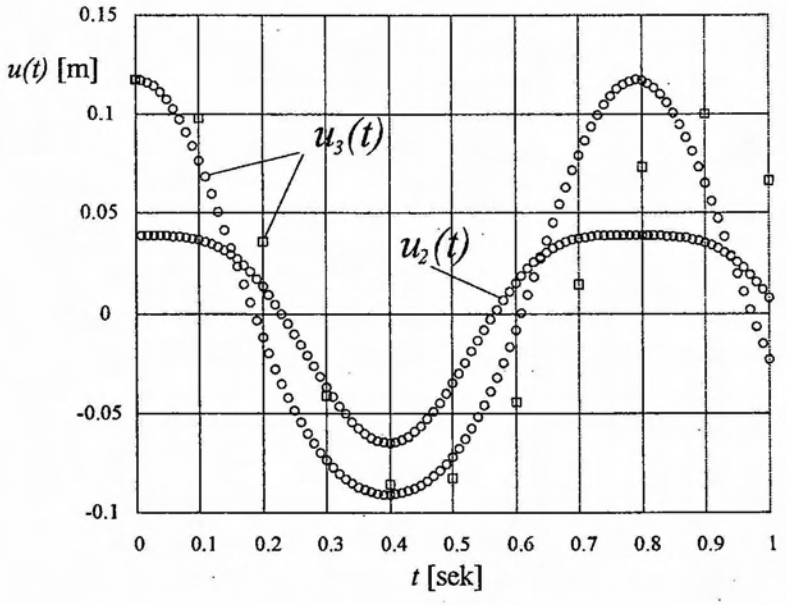
a posunutia uzlových bodov v tomto čase

$$\begin{bmatrix}u_2(0,1)\\u_3(0,1)\end{bmatrix}=\mathbf{u}(0,1)=\hat{\mathbf{K}}^{-1}\hat{\mathbf{f}}(0,1)=10^{-4}\begin{bmatrix}8,6733 & 2,1026\\ 2,1026 & 19,4991\end{bmatrix}\begin{bmatrix}31,2500\\46,8750\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0,0370\\0,0977\end{bmatrix}$$

Zrýchlenia a rýchlosti podľa (9) a (10) potom v čase 0,1 sekundy sú

$$\begin{bmatrix}\ddot{u}_2(0,1)\\\ddot{u}_3(0,1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0,8410\\-7,7796\end{bmatrix};\qquad\begin{bmatrix}\dot{u}_2(0,1)\\\dot{u}_3(0,1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0,0421\\-0,3890\end{bmatrix}$$

S týmito známymi hodnotami sa teraz cyklus zopakuje pre čas 0,2 sekundy, 0,3 sekundy atď. až po $t_{max}=1$ sekunda. Vypočítané posunutia v uzle 3 pri tomto časovom kroku 0,1 sekundy sme v obr. 3.3 znázornili štvorčekmi. Je vidieť, že pre zhruba jeden cyklus kmitania máme k dispozícci 11 bodov, čo nie je dostatočná presnosť. Pri voľbe $\Delta t = 0,01$ sekundy je už hustota časových krokov dostatočná, ako vidieť z grafického znázornenia vypočítaných hodnôt posunutí uzlových bodov pri tomto časovom delení v obrázku 3.3 (hodnoty vyznačené krúžkami). Pripomíname (príklad 3.1), že vlastné frekvencie tejto relatívne veľmi „mäkkej" sústavy sú f_1 = 1,273 Hz a f_2 = 2,546 Hz a je vidieť, že poznanie (najnižších) vlastných frekvencií telies dáva tiež dôležitú informáciu pre voľbu vyhovujúceho časového kroku.



Obrázok 3.6

Príklad 3.5 Riešte úlohu z predchádzajúceho príkladu pomocou programu ANSYS.

1. Zadanie názvu úlohy
Utility Menu>File>Change Jobname... /FILENAM = PRIAMO_2HMOTY, OK;

2. Otvorenie predprocesora
ANSYS Main Menu>Preprocessor;

3. Zadanie typu prvkov pre úlohu
Preprocessor>Element Type>Add/Edit/Delete, Add... Combination Spring-damper 14, OK, Add...,
Structural Mass, 3D Mass 21, OK, Close;

4. Zadanie štyroch prvkových konštánt
Preprocessor>Real Constants>Add/Edit/Delete, Add... Typ 1 COMBIN14, OK, K = 256, OK, *Add...*,
Typ 1 COMBIN14, OK, K = 128, *Add...* Typ 2 MASS21, OK, MASSX = 2, OK,
Add..., Typ 2 MASS21, OK, MASSX = 1, OK, Close;

5. Zapnutie trvalého číslovania uzlových bodov kvôli kontrole
*Utility Menu>PlotCtrls>Numbering...*NODE=ON, OK;

6. Vytvorenie uzlových bodov úlohy (číslovanie je automatické)
Preprocessor>Modeling>Create>Nodes>In Active CS... X = 0, Y = 0, Apply,
X = 1, Y = 0, Apply,
X = 2, Y = 0, OK;

7. Aktualizácia údajov pre prvý pružinový prvok
Preprocessor>Modeling>Create>Elements>Elem Attributes... Typ 1 COMBIN14,
REAL = 1, OK;

8. Vytvorenie prvého pružinového prvku
Preprocessor>Modeling>Create>Elements>Auto Numbered>Thru Nodes↑ P: Uzol 1,
P: Uzol 2, OK;

9. Aktualizácia údajov pre druhý pružinový prvok
Preprocessor>Modeling>Create>Elements>Elem Attributes...
Typ 1 COMBIN14, REAL = 2, OK;

10. Vytvorenie druhého pružinového prvku
Preprocessor>Modeling>Create>Elements>Auto Numbered>Thru Nodes↑ P: Uzol 2,
P: Uzol 3, OK;

11. Aktualizácia údajov pre prvý prvok bodovej hmotnosti
Preprocessor>Modeling>Create>Elements>Elem Attributes... Typ 2 MASS 21,
REAL=3, OK;

12. Vytvorenie prvého prvku bodovej hmotnosti
Preprocessor>Modeling>Create>Elements>Auto Numbered>Thru Nodes↑ P: Uzol 2, OK;

13. Aktualizácia údajov pre druhý prvok bodovej hmotnosti
Preprocessor>Modeling>Create>Elements>Elem Attributes... Typ 2 MASS 21,
REAL=4, OK;

14. Vytvorenie druhého prvku bodovej hmotnosti
Preprocessor>Modeling>Create>Elements>Auto Numbered>Thru Nodes↑ P: Uzol 3, OK;

15. Ukončenie práce v predprocesore
Preprocessor>Finish;

16. Upevnenie uzla č. 1
Ansys Main Menu>Solution>Define Loads>Apply>Structural>Displacement>On Nodes↑
P: Uzol 1, OK,All DOF, OK;

17. Zadanie typu analýzy
Solution>Analysis Type>New Analysis... Transient, OK, TRNOPT = Full, OK;

18. Zadanie sily do uzla č. 3
Solution>Define Loads>Apply>Structural>Force/Moment>On Nodes↑
P: Uzol 3, OK, Lab = FX, VALUE = 10, OK;

19. Zapnutie neskrátenej ponuky príkazov
Solution> P: Unabridged Menu;

20. Zadanie údajov pre zápis vypočítaných hodnôt
Solution>Load Step Opts>Output Ctrls>DB/Results File... Item = All items
FREQ = Every substep, OK;

21. Hodnoty pre prvý zaťažovací krok
Solution> Load Step Opts>Time/Frequenc>Time-Time Step... TIME = 10, DELTIM = 5,
KBC = Ramped, OK;

22. Uloženie 1. zaťažovacieho kroku na disk
Solution> Load Step Opts>Write LS File... LSNUM = 1, OK;

23. Odstránenie sily *F*
Solution>Define Loads>Delete>Structural>Force/Moment>On Nodes↑ P: Uzol 3, OK,
Lab = FX, OK;

24. Hodnoty pre druhý zaťažovací krok
Solution> Load Step Opts>Time/Frequenc>Time-Time Step... TIME = 11, DELTIM = 0.01,
KBC = Stepped, OK;

25. Uloženie 2. zaťažovacieho kroku na disk
Solution> Load Step Opts>Write LS File... LSNUM = 2, OK;

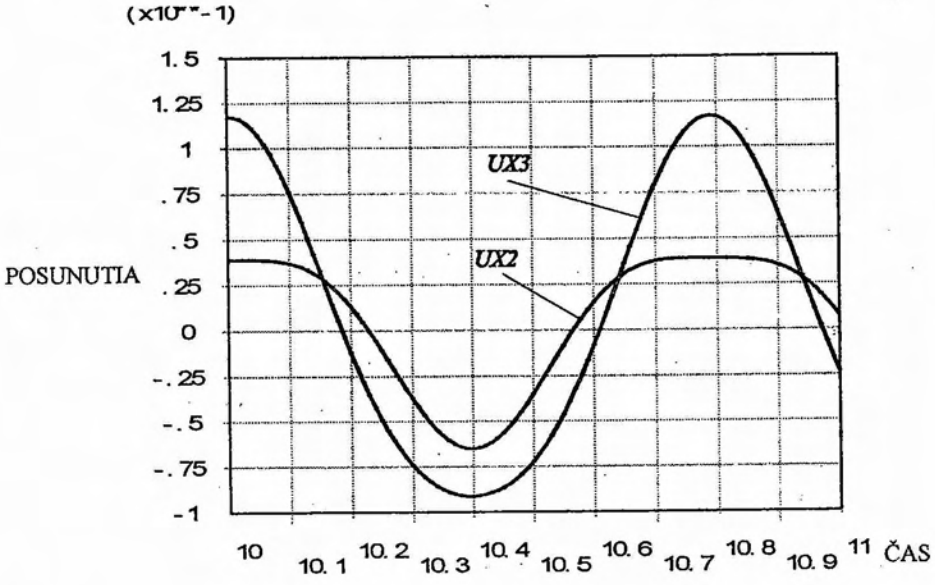
26. Výpočet úlohy
Solution>Solve>From LS Files... LSMIN = 1, LSMAX = 2, OK;

27. Ukončenie práce v *Solution*
ANSYS Main Menu>Finish;

28. Zadanie premenných pre grafické zobrazenie
ANSYS Main Menu>TimeHist Postpro> (Uzavrieť *Variable Viewer) >Define Variables...* Add... Nodal DOF Result, OK↑ P: Uzol 2, Apply, Name = UX2, Comp = Translation UX, OK, Add..., Nodal DOF Result, OK↑ P: Uzol 3, OK, Name = UX3, Comp = Translation UX, OK, Close;

29. Nastavenie intervalu zobrazenia
Utility Menu>PlotCtrls>Style>Graphs>Modify Axis... XRANGE = Specified range, XMIN = 10, XMAX = 11, OK;

30. Zobrazenie posunutí uzlových bodov v čase po odstránení sily *F*
TimeHist Postpro>Graf Variables... NVAR1 = 2, NVAR2 = 3, OK;



Poznámky k príkladu

1. Výpočtový model je rovnaký ako v príklade 3.2, kde sa pre túto sústavu počítali vlastné frekvencie a vlastné tvary kmitania. Práce v predprocesore, t. j. tvorba modelu, je pri oboch príkladoch rovnaká a príklady sa líšia až od miesta, kde sa určuje typ výpočtu (príkaz č. 17). Pokiaľ máme databázu uvedeného príkladu uloženú, možno ju načítať príkazom *Utility Menu>File>Resume from ...* P: Názov_databázy, OK a riešiť novú úlohu od príkazu č. 17.

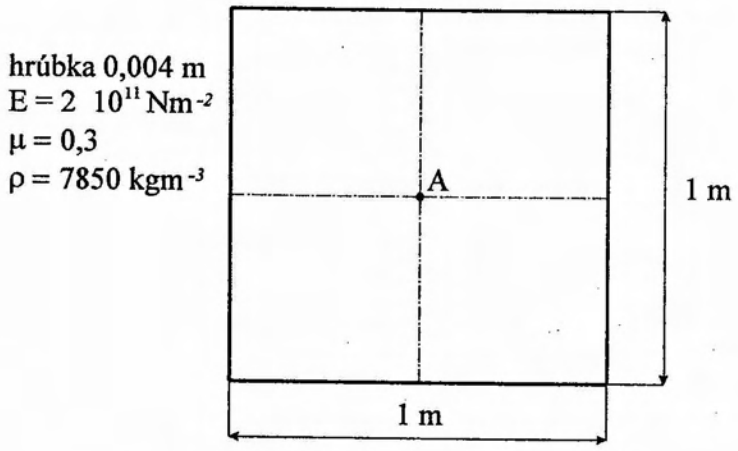
2. Zadávanie volieb a hodnôt pre zaťažovacie kroky (príkazy č. 20, 21 a 24) možno vykonávať aj v tabuľkovej forme, ktorú vyvoláme pre každý zaťažovací krok príkazmi *Solution>Analysis Type>Sol'n Controls*. Tento postup použijeme v nasledujúcom príklade.

3. Na grafické spracovanie časovo závislých veličín v postprocesore *Time History Postprocessor* možno využiť aj skupinu príkazov, ktorú poskytuje okno s názvom *Variable Viewer*, ktoré sa pri voľbe uvedeného postprocesora automaticky otvorí. Nájdeme v ňom aj príkazy 28 až 30, ktorých vykonávanie sa štartuje kliknutím na farebné ikonky rozhrania. *Variable Viewer* sme nepoužili a príkazy pre grafiku sme štarovali klasickou formou (použitý je v nasledujúcom príklade).

4. Zmenou veľkosti časového kroku v príkaze č. 24 a opätovným výpočtom možno sledovať vplyv tejto veličiny na presnosť riešenia úlohy.

Príklad 3.6

Štvorcovú dosku z príkladu 3.3 zaťažte kolmo na jej rovinu rázovým tlakom p, ktorý nadobudne hodnotu 1000 Pa v priebehu jednej stotiny sekundy a potom sa jeho hodnota už nemení. Vypočítajte časový priebeh posunutia bodu A v smere kolmo na rovinu dosky a intenzitu napätia pre čas maximálneho priehybu dosky. Doska je po celom obvode votknutá. Hodnoty modulu pružnosti v ťahu E, Poissonovho čísla μ a hustoty materiálu ρ sú udané v obrázku. Úlohu riešte priamou integráciou pohybových rovníc.



1. Zadanie názvu úlohy
Utility Menu>File>Change Jobname... /FILNAM = DOSKA_FULL, OK;

2. Otvorenie predprocesora
ANSYS Main Menu>Preprocessor;

3. Zadanie typu prvkov pre úlohu
Preprocessor>Element Type>Add/Edit/Delete, Add... Shell 8 node 93, OK, Close;

4. Zadanie hrúbky dosky
Preprocessor>Real Constants>Add/Edit/Delete, Add... Typ 1 SHELL 93, OK, TK(I) = 0.004, OK, Close;

5. Materiálové údaje
Preprocessor>Material Props>Material Models... Structural>Linear>Elastic>Isotropic... EX = 2e11, PRXY = 0.3, OK, >Density DENS = 7850, OK >Material>Exit;

6. Vytvorenie stredovej plochy dosky
Preprocessor>Modeling>Create>Areas>Rectangle>By Dimensions... X1 = 0, X2 = 1, Y1 = 0, Y2 = 1, OK;

7. Vytvorenie siete 20 x 20 prvkov
Preprocessor>Meshing>Size Cntrls>ManualSize>Global>Size... SIZE = 0.05, OK;
Preprocessor>Meshing>Mesh>Areas>Mapped>3 or 4 sided... Pick All;

8. Ukončenie práce v predprocesore
Preprocessor>Finish;

9. Votknutie okrajov dosky
ANSYS Main Menu>Solution>Define Loads>Apply>Structural>Displacement>On Lines↑... Pick All, All DOF, OK;

10. Zadanie typu analýzy
Solution>Analysis Type>New Analysis... Transient, OK, Full, OK;

11. Zadanie maximálnej hodnoty tlaku
Solution>Define Loads>Apply>Structural>Pressure>On Areas↑... Pick All,
VALUE = 1000, OK;

12. Voľby a údaje pre prvý zaťažovací krok
Solution> Analysis Type>Sol'n Controls, *Basic*... Time at end of loadstep = 0.01, Time increment =
= ON, Time step size = 0,001, Frequency = Write every substep,
Transient, Ramped loading = ON, Transient effects = ON, OK;

13. Uloženie prvého zaťažujúceho kroku na disk
Solution>Load Step Opts>Write LS File... LSNUM = 1, OK;

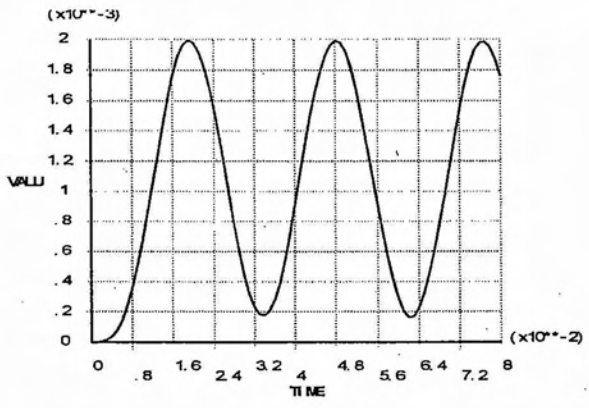
14. Voľby a údaje pre druhý zaťažovací krok
Solution> Analysis Type>Sol'n Controls... Basic... Time at end of loadstep = 0.08, Time increment =
= ON, Time step size = 0,001, Frequency = Write every substep, OK;

15. Uloženie druhého zaťažujúceho kroku na disk
Solution>Load Step Opts>Write LS File... LSNUM = 2, OK;

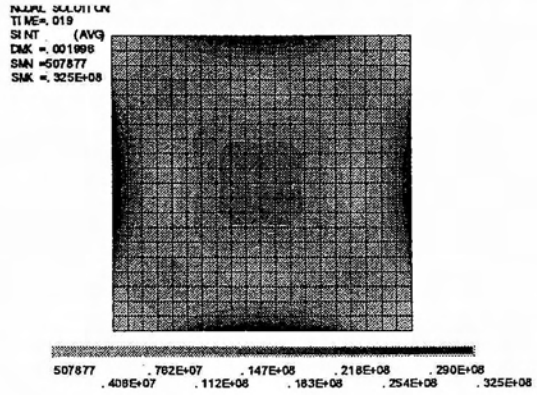
15. Výpočet úlohy (trvá relatívne dlho)
Solution>Solve>From LS Files... LSMIN = 1, LSMAX = 2, OK;

16. Ukončenie práce v *Solution*
ANSYS Main Menu>Finish;

17. Grafické zobrazenie kmitania stredu dosky pomocou *Variable Viewer*
ANSYS Main Menu>TimeHist Postpro> P: Prvú ikonu zľava (*Add data*), Nodal Solution, DOF Solution, Z-Component of displacement, OK↑ P: Uzol v strede dosky, OK P: Tretiu ikonu zľava (*Graph Data*), File, Close;



18. Zobrazenie rozdelenia intenzity napätia v čase $t = 0.019$ sek. (čas maximálneho priehybu)
ANSYS Main Menu>General Postproc>Read Results>By Time/Freq... TIME = 0.019, OK;
General Postproc>Plot Results>Contour Plot>Nodal Solu... Stress, Intensity SINT, OK;



Poznámky k príkladu

1. Výpočtový model je rovnaký ako v príklade 3.3, kde sa pre túto sústavu počítali vlastné frekvencie a vlastné tvary kmitania. Práce v predprocesore, tj. tvorba modelu, je pri oboch príkladoch rovnaká a príklady sa líšia až od miesta, kde sa určuje typ výpočtu (príkaz č. 10). Pokiaľ máme databázu uvedeného príkladu uloženú, možno ju načítať príkazom *Utility Menu>File>Resume from ...*, P: Názov_databázy, OK a riešiť novú úlohu od príkazu č. 10.

2. Ako vidieť riešenie kmitania telies metódou priamej integrácie pohybových rovníc je z aplikačného hľadiska v MKP jednoduché, pravda, náročné na strojový čas, čo sa prejavilo už aj pri tomto jednoduchom telese. Dosku sme museli pomerne jemne deliť na prvky, aby sme dostatočne presne zachytili jej deformačný tvar pri kmitaní a na jeden cyklus je potrebné zvoliť aspoň 20 časových krokov. Pretože sme úlohu riešili bez tlmenia, celkový časový interval je malý, a napriek tomu bolo treba riešiť 80 časových krokov, čo sa na celkovom čase riešenia citelne prejavilo i pri použití výkonného počítača a efektívnych výpočtových postupov opísaných v nasledujúcej časti 3.5. Pri zložitejších telesách a výpočtoch s tlmením, je výhodné použiť iné metódy tak, ako to demonštrujeme v častiach 3.6 a 3.7.

3.5 Riešenie sústavy rovníc v MKP

Väčšina úloh MKP vedie na sústavu n lineárnych algebrických rovníc typu (2.5- 9) resp. (3.4- 6), ktorú môžeme zapísať v tvare

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{3.5- 1}$$

kde $\mathbf{A}$ je štvorcová pozitívne definitná matica koeficientov, $\mathbf{b}$ je vektor pravých strán sústavy a $\mathbf{x}$ je vektor, ktorého členy sú hľadané neznáme úlohy. Programy MKP ponúkajú na riešenie tohoto systému dva základné postupy

- priamy eliminačný postup výpočtu neznámych - väčšinou založený na Gaussovej eliminácii
- iteračný postup určenia $\mathbf{x}$

Uveďme aspoň základné postupy, ktorými sa pri priamom eliminačnom postupe dosahuje vysoká efektívnosť numerického riešenia statických a najmä veľkých dynamických úloh.

Predpokladajme, že sa nám podarilo maticu $\mathbf{A}$ rozložiť na dve trojuholníkové matice tak, že platí

$$\mathbf{A} = \mathbf{D}\mathbf{H} \tag{3.5- 2}$$

pričom

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ D_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ D_{n1} & D_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{3.5- 3}$$

a

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \cdots & H_{1n} \\ 0 & H_{22} & \cdots & H_{2n} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & H_{nn} \end{bmatrix} \tag{3.5- 4}$$

Zavedením pomocného vektora **y**

$$\mathbf{Hx} = \mathbf{y} \tag{3.5- 5}$$

môžeme rovnicu (1) napísať v tvare

$$\mathbf{Dy} = \mathbf{b} \tag{3.5- 6}$$

Výpočet neznámych sústavy (1) je teraz už jednoduchý a numericky rýchly. Najprv sa vypočítajú členy vektora zo (6)

$$\begin{aligned} y_1 &= b_1 \\ y_i &= b_i - \sum_{j=1}^{i-1} D_{ij} y_j \qquad i = 2, 3, \ldots, n \end{aligned} \tag{3.5- 7}$$

a potom hľadané členy vektora **x** z (5)

$$\begin{aligned} x_n &= y_n / H_{nn} \\ x_i &= \left(y_i - \sum_{j=i+1}^{n} H_{ij} x_j \right) / H_{ii} \qquad i = n-1, \ldots, 1 \end{aligned} \tag{3.5- 8}$$

Výpočet matíc **D** a **H**, ktorý nazývame faktorizáciou (*matrix factorization*) alebo trojuholníkovým rozkladom (*triangular decomposition)* matice koeficientov, možno realizovať viacerými metódami, ktoré v podstate obyčajne predstavujú rôzne modifikácie Gaussovej eliminačnej metódy. Celý rozklad sa pri programovej realizácii vykonáva v poli matice **A** , ktorá sa po jeho skončení zmení na

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \cdots & H_{1n} \\ D_{21} & H_{22} & \cdots & H_{2n} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ D_{n1} & D_{n2} & \cdots & H_{nn} \end{bmatrix}$$

čím sú matice **D** a **H** jednoznačne určené, pretože diagonálne členy matice **D** sa rovnajú jednej. Trojuholníkový rozklad teda nezvyšuje nároky na kapacitu pamäti počítača, jeho časová náročnosť zodpovedá zhruba času potrebnému na riešenie sústavy (1) s jedným vektorom pravých strán. Najväčšia výhoda tohoto postupu pri riešení dynamických úloh metódou priamej integrácie spočíva v tom, že po vykonaní rozkladu (ktorý sa pri lineárnych úlohách robí len jedenkrát), možno už veľmi rýchle riešiť sústavu pre rozdielne vektory pravých strán z rovníc (7) a (8).

Matica koeficientov sústavy **A** v MKP má obyčajne špeciálne vlastnosti. Veľmi často je symetrická a výrazne riedka (*sparse*) s nenulovými členmi v okolí hlavnej diagonály; pásovosť matice sa obyčajne ešte dalej zužuje tým, že pred vlastným riešením sa z tohoto hľadiska optimálne zmení číslovanie uzlov (pri Gaussovej eliminácii), resp. prvkov (pri frontálnej metóde riešenia sústavy - *frontal or wave front solution procedure*). V prípade symetrie možno pri výpočte **x** použiť Choleského rozklad (*Cholesky decomposition*), ktorého princíp sme opísali, vtedy sa ale ukladá do pamäti počítača len horná (resp. dolná) trojuholníková časť matice s hlavnou diagonálou a platí (napr.[20])

$$\mathbf{A} = \mathbf{H}^T \mathbf{H} \tag{3.5- 9}$$

kde členy matice **H** sú dané vzťahmi

$$
\left.
\begin{aligned}
H_{11} &= (a_{11})^{1/2} \\
H_{1j} &= a_{1j}/H_{11} \ , \quad j = 2, 3, \ldots, \mathrm{n} \\
H_{ii} &= \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} H_{ki}^2 \right)^{1/2} , \quad i = 2, 3, \ldots, \mathrm{n} \\
H_{ij} &= \frac{1}{H_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} H_{ki} H_{kj} \right)^{1/2} , \quad i = 2, 3, \ldots, \mathrm{n} \ ; \ j = i+1, i+2, \ldots, n \\
H_{ij} &= 0 \ , \quad i > j
\end{aligned}
\right\} \quad (3.5-10)
$$

Pre inverziu matice **A** platí

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{H}^{-1} \left(\mathbf{H}^{-1} \right)^T \qquad (3.5\text{-}11)$$

Pásovosť symetrickej matice sa využíva tak, že sa ukladá len nenulový polpás, prípadne len jeho nenulové členy pod profilom (*skyline*) pása, s ktorým sa pri riešení sústavy pracuje obyčajne vo forme jednorozmerného poľa.

3.6 Metóda superpozície vlastných tvarov

V prípade, že potrebujeme riešiť veľkú dynamickú úlohu (úlohu s veľkým počtom stupňov voľnosti a pre dlhší časový interval s malým časovým krokom) efektívnou alternatívou metód priamej integrácie je metóda superpozície vlastných tvarov. Princíp tejto metódy spočíva v tom, že pred integráciou sa pohybové rovnice úlohy najprv transformujú do tvaru, v ktorom je táto procedúra menej časovo náročná. Na túto transformáciu sa veľmi výhodne dajú využiť vlastné tvary telesa, a to tak , že sa hľadané funkcie zložiek posunutia uzlových bodov telesa v čase t vyjadria vo forme lineárnej kombinácie vlastných tvarov $\boldsymbol{\phi}_i$ a nových (vhodnejších) neznámych funkcií $z_i(t)$

$$\mathbf{a}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_1 & \boldsymbol{\phi}_2 & \cdots & \boldsymbol{\phi}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{z}(t) \qquad (3.6\text{-}1)$$

Pri uvedenej transformácii sa využívajú vlastnosti, ktoré sme uviedli v časti 3.3, jednak ortogonálnosť vlastných tvarov vzhľadom na **K** a **M**

$$\boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_j = 0 \ , \quad i \neq j \qquad (3.6\text{-}2)$$

$$\boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_j = 0 \ , \quad i \neq j \qquad (3.6\text{-}3)$$

a aj ich **M**-normovanie, pri ktorom platí

$$\boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_i = 1 \ , \quad \mathrm{i} = 1, 2, \ldots, \mathrm{n} \qquad (3.6\text{-}4)$$

K týmto vlastnostiam pribudne ešte vzťah, ktorý dostaneme, keď (3.3- 3)

$$\mathbf{K}\phi_i = \omega_i^2 \mathbf{M}\phi_i$$

vynásobíme s ϕ_i^T zľava a uplatníme (4)

$$\phi_i^T \mathbf{K}\phi_i = \omega_i^2 , \qquad i = 1, 2, \ldots , n \tag{3.6- 5}$$

Ukážme si postup tejto transformácie pre úlohu bez tlmenia, keď treba integrovať rovnice (3.1.9)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f}(t) \tag{3.6- 6}$$

Dosadíme (1) do (6) a členy v tomto vzťahu vynásobíme zľava s Φ^T

$$\Phi^T \mathbf{M}\Phi\ddot{\mathbf{z}}(t) + \Phi^T \mathbf{K}\Phi\mathbf{z}(t) = \Phi^T \mathbf{f}(t) \tag{3.6- 7}$$

Využitím (2) až (5) možno vzťah (7) vyjadriť v tvare

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{z}_1(t) \\ \ddot{z}_2(t) \\ \vdots \\ \ddot{z}_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1^T \mathbf{f}(t) \\ \phi_2^T \mathbf{f}(t) \\ \vdots \\ \phi_n^T \mathbf{f}(t) \end{bmatrix} \tag{3.6- 8}$$

Namiesto sústavy diferenciálnych rovníc (6) stačí teda podľa (8) riešiť n jednoduchých na sebe nezávislých rovníc

$$\ddot{z}_i(t) + \omega_i^2 z_i(t) = \overline{F}_i(t) \qquad i = 1, 2, \ldots , n \tag{3.6- 9}$$

kde

$$\overline{F}_i(t) = \phi_i^T \mathbf{f}(t) \tag{3.6- 10}$$

Vynásobením (1) zľava s $\phi_i^T \mathbf{M}$ a využitím (3) a (4) dostávame vzťahy pre transformáciu začiatočných podmienok

$$z_i(0) = \phi_i^T \mathbf{M}\mathbf{a}(0) \tag{3.6- 11}$$

$$\dot{z}_i(0) = \phi_i^T \mathbf{M}\dot{\mathbf{a}}(0) \tag{3.6- 12}$$

Po určení funkcií $z_i(t)$ hľadané časové závislosti posunutí uzlových bodov určíme z (1). Riešenie rovníc (9) i superpozícia podľa (1) sa pri malom počte rovníc a jednoduchých funkciách $\mathbf{f}(t)$ dajú vykonať aj analyticky. Pre veľké úlohy a zložitejšie zaťaženie to však program MKP vykoná rýchle a efektívne aj pre veľký počet časových bodov; pritom sa diferenciálne rovnice (9) riešia numericky, obyčajne metódami krokovej integrácie (napr. opísanou Newmarkovou metódou), alebo numerickým riešením Duhamelovho integrálu (napr. [21]).

V mnohých prípadoch netreba vo vzťahu (1) uvažovať všetky vlastné tvary výpočtového modelu telesa, ale len určitý počet významných najnižších vlastných tvarov, čím sa efektívnosť metódy ešte ďalej zvyšuje.

V prípade úlohy s tlmením pohybové rovnice výpočtového modelu telesa sú (3.1 –10)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f} \tag{3.6- 13}$$

kde pribudli tlmiace sily $\mathbf{C}\dot{\mathbf{a}}$ závislé od rýchlosti. Ako sme už uviedli v 3.1, vo všeobecnosti nie je možné určiť maticu tlmenia telesa $\mathbf{C}$ z tlmiacich vlastností konečných prvkov a v podstate je do (13) zavedená ako určitá forma aproximácie súhrnnej disipácie energie kmitajúceho telesa. Ak predpokladáme proporcionálne tlmenie, kedy maticu tlmenia volíme v tvare (3.1 –11)

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K} \tag{3.6- 14}$$

potom sú vlastné tvary ortogonálne aj k matici $\mathbf{C}$ a sústavu (13) možno transformovať na sústavu nezávislých diferenciálnych rovníc. Po dosadení (14) do sústavy (13) postupujeme analogicky ako v úlohe bez tlmenia a dostaneme rovnice

$$\ddot{z}_i(t) + \left(\alpha + \beta\omega_i^2\right)\dot{z}_i(t) + \omega_i^2 z_i(t) = \overline{F}_i(t) \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{3.6- 15}$$

Rovnice (15) sa obyčajne upravujú do tvaru známeho z riešenia úlohy s jedným stupňom voľnosti zavedením

$$2\xi_i\omega_i = \alpha + \beta\omega_i^2 \tag{3.6- 16}$$

kde $0 \le \xi_i \ll 1$ je modálny koeficient tlmenia (*modal damping ratio*)

$$\xi_i = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta\omega_i}{2} \tag{3.6- 17}$$

udávajúci pre daný vlastný tvar pomernú hodnotu tlmenia vzhľadom na kritické tlmenie (hranica medzi periodickým a aperiodickým pohybom; $\xi_{krit} = 1$). Po tejto substitúcii dostaneme

$$\ddot{z}_i(t) + 2\omega_i\xi_i\dot{z}_i(t) + \omega_i^2 z_i(t) = \overline{F}_i(t) \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{3.6- 18}$$

Pre $\overline{F}_i(t)$ a začiatočné podmienky platia bez zmeny vzťahy (10) až (12). Po určení funkcií $z_i(t)$ hľadané časové závislosti posunutí uzlových bodov určíme z (1).

V programoch MKP sa rovnice (18) riešia opäť numericky, obyčajne metódami krokovej integrácie alebo numerickým riešením Duhamelovho integrálu.

Riešenie rovnice typu (18) pre malé tlmenie a jednoduchú pravú stranu nájdeme v každej učebnici dynamiky. Pre nulovú pravú stranu je to vlastne rovnica voľného kmitania sústavy s jedným stupňom voľnosti s tlmením. Ak označíme

$$\delta_i = \omega_i\xi_i\ ; \quad \overline{\omega}_i = \sqrt{\delta_i^2 - \omega_i^2}\ ; \quad z_i(0) = z_{i0}\ ; \quad \dot{z}_i(0) = \dot{z}_{i0}$$

riešenie má tvar [18]

$$z_i(t) = e^{-\delta_i t}\left[z_{i0}\cos\left(\overline{\omega}_i t\right) + \frac{\dot{z}_{i0} + z_{i0}\delta_i}{\overline{\omega}_i}\sin\left(\overline{\omega}_i t\right)\right] \tag{3.6 -19}$$

Ak pre dve rozdielne vlastné frekvencie telesa poznáme alebo experimentálne určíme dva modálne koeficienty tlmenia, možno zo vzťahu (17) určiť koeficienty α a β a pomocou nich podľa (14) maticu proporcionálneho tlmenia $\mathbf{C}$ pre metódy priamej integrácie. Všimnime si v (17), ako v takomto prípade koeficienty α a β ovplyvňujú tlmenie telesa: Tuhostné

tlmenie viac tlmí vyššie frekvencie a menej nižšie, kým pri tlmení hmotnostnom je to naopak. Pri metóde superpozície vlastných tvarov, ako vidieť, sa táto matica netvorí a celkové tlmenie telesa sa simuluje tlmením vlastných tvarov telesa.

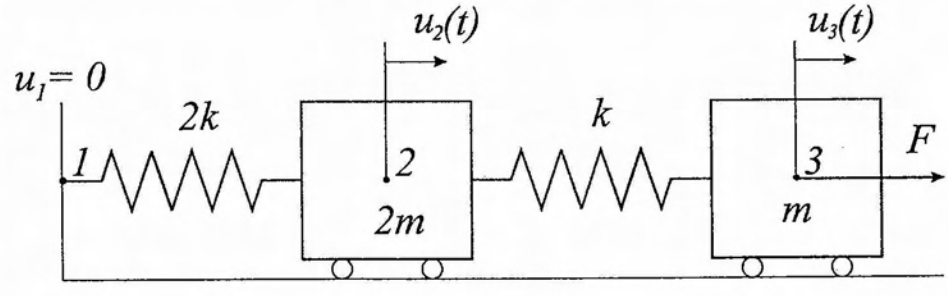
Výpočtové vystihnutie, alebo aspoň priblíženie sa k reálnemu tlmeniu telesa (konštrukcie), o ktorej z tohoto hľadiska nemáme bližšie údaje, je vždy najťažším problémom riešenia úlohy s tlmením. Často sa volí rovnaký koeficient ξ pre všetky vlastné tvary, pretože v odbornej literatúre možno nájsť približné vodítka na jeho voľbu pre určité skupiny úloh. Výber z týchto odporúčaní je uvedený v tabuľke 3.1.

Tabuľka 3.1

Typ a stav konštrukcie	Úroveň napätia	Koeficient tlmenia ξ
Oceľová; drevená; vystužený resp. predpätý betón; Bez trhlín Bez trecích spojov	Nízka Intenzita napätia menšia ako štvrtina medze sklzu	0,005 ÷ 0,01
Oceľová zvarovaná	Prevádzkové napätie menšie ako polovica medze sklzu	0,02
	Okolo medze sklzu	0,05
	Za medzou sklzu	0,07 ÷ 0,1
Vystužený betón s trhlinami	Prevádzkové napätie	0,03 ÷ 0,05
Oceľová skrutkovaná	Prevádzkové napätie	0,05 ÷ 0,07
	Okolo medze sklzu	0,1 ÷ 0,15
Oceľový potrubný systém	Prevádzkové napätie	0,005 ÷ 0,05

Príklad 3.7

Jednorozmernú netlmenú dvojhmotovú sústavu s dvomi pružinami na obr. 3.7 zaťažíme v uzlovom bode č. 3 statickou silou F, ktorú potom v čase $t = 0$ náhle odstránime. Určite metódou superpozície vlastných tvarov časové priebehy posunutí bodov 2 a 3 v intervale 0 až t_{max} , keď je dané: $k = 128$ Nm^{-1}, $m = 1$ kg, $F = 10$ N, $t_{max} = 3$ sekundy. Úlohu riešte najprv bez tlmenia a potom s tlmením. Pri riešení s tlmením zvoľte rovnaký koeficient modálneho tlmenia pre oba vlastné tvary $\xi = 0{,}05$.



Obrázok 3.7

Diferenciálne rovnice úlohy bez tlmenia dostaneme z (9)

$$\ddot{z}_1(t) + \omega_1^2 z_1(t) = \overline{F}_1(t)$$
$$\ddot{z}_2(t) + \omega_2^2 z_2(t) = \overline{F}_2(t) \qquad \text{(a)}$$

Z príkladu 3.1 preberieme vlastné kruhové frekvencie

$$\omega_1 = 8\,s^{-1}$$

$$\omega_2 = 16\,s^{-1}$$

maticu $\mathbf{M}$ po zavedení okrajovej podmienky $u_1(t) = 0$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

vlastné tvary normované na maticu $\mathbf{M}$

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} 0,4082 \\ 0,8165 \end{bmatrix}; \qquad \phi_2 = \begin{bmatrix} -0,5774 \\ 0,5774 \end{bmatrix}$$

a začiatočné podmienky v čase $t = 0$

$$\mathbf{a}(0) = \begin{bmatrix} u_2(0) \\ u_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0391 \\ 0,1172 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{a}}(0) = \begin{bmatrix} \dot{u}_2(0) \\ \dot{u}_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Transformované začiatočné podmienky potom podľa (11) a (12) sú

$$z_1(0) = \phi_1^{\mathrm{T}} \mathbf{M} \mathbf{a}(0) = 0,1274$$

$$z_2(0) = \phi_2^{\mathrm{T}} \mathbf{M} \mathbf{a}(0) = 0,0225$$

$$\dot{z}_1(0) = \phi_1^{\mathrm{T}} \mathbf{M} \dot{\mathbf{a}}(0) = 0$$

$$\dot{z}_2(0) = \phi_2^{\mathrm{T}} \mathbf{M} \dot{\mathbf{a}}(0) = 0$$

Počas kmitania vo vyšetrovanom intervale sústava nie je zaťažená a aj transformované zaťaženia podľa (10) sú nulové

$$\overline{F}_i(t) = \phi_1^{\mathrm{T}} \mathbf{f}(t) = \phi_1^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \qquad \mathrm{i} = 1, 2$$

Všeobecné riešenie rovníc (a) s nulovými pravými stranami je známe, zvolíme ho v tvare

$$z_i(t) = A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) \qquad \mathrm{i} = 1, 2 \qquad \text{(b)}$$

Potom platí

$$\dot{z}_i(t) = \omega_i A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) \qquad \mathrm{i} = 1, 2$$

a zo začiatočných podmienok dostaneme

$$\varphi_i = \pi/2 \qquad \mathrm{i} = 1, 2$$

$$A_1 = 0,1274$$

$$A_2 = 0,0225$$

takže modálne rovnice (b) sú

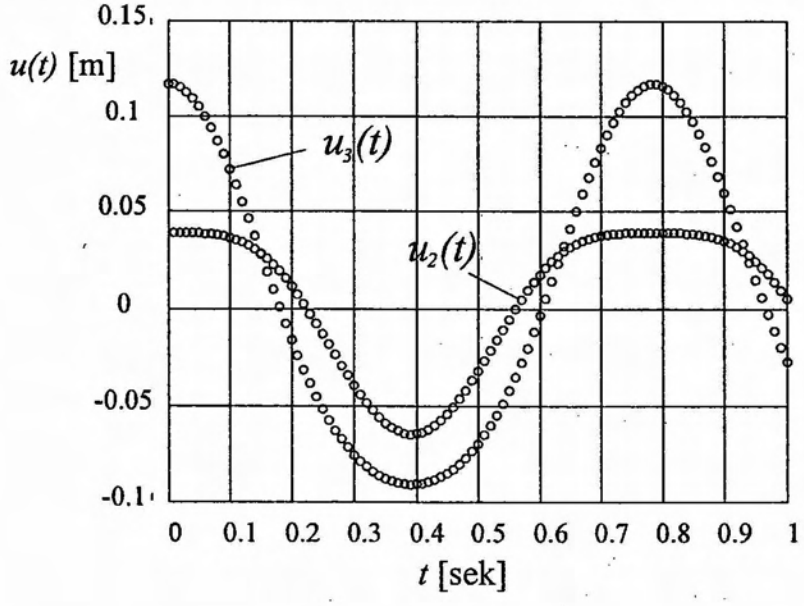
$$z_1(t) = 0,1274\sin(8t + \frac{\pi}{2})$$

$$z_2(t) = 0,0225\sin(16t + \frac{\pi}{2})$$

Zo vzťahu (1) redukovaného pre náš prípad

$$\mathbf{a}(t) = \begin{bmatrix} u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} = [\phi_1 \quad \phi_2]\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} 0,4082 & -0,5774 \\ 0,8165 & 0,5774 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix}$$

už teraz môžeme vyjadriť časové funkcie kmitania uzlových bodov vo vhodnej hustote. Ich vyčíslenie zhruba v rozsahu jednej periódy (vzhľadom na nulové tlmenie sa hodnoty cyklicky opakujú) s hustotou 0,01 sekundy je znázornené na obr. 3.8.



Obrázok 3.8

Pri riešení sústavy s tlmením vychádzame z rovníc (18)

$$\ddot{z}_i(t) + 2\omega_i\xi_i\dot{z}_i(t) + \omega_i^2 z_i(t) = \overline{F}_i(t) \qquad i = 1, 2$$

a postupujeme analogicky. Transformované začiatočné podmienky sú rovnaké a vzhľadom na kmitanie sústavy bez zaťaženia sú pravé strany rovníc nulové, takže vyčíslené riešenia týchto rovníc podľa (19) sú

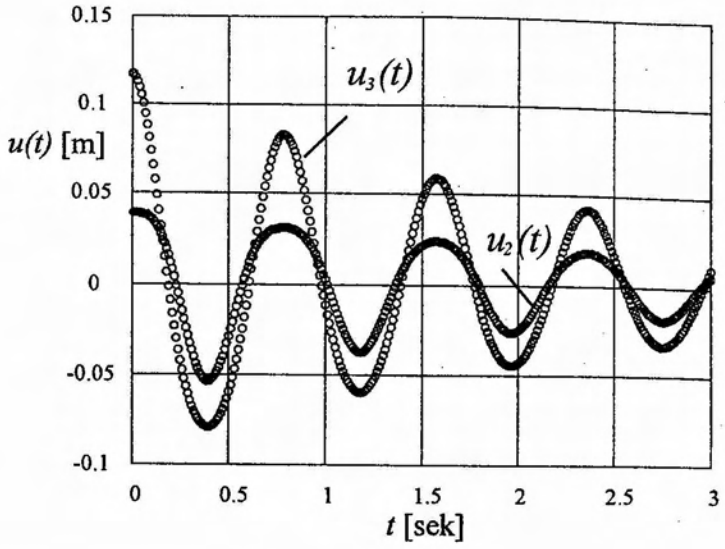
$$z_1(t) = e^{-0,4t}\left[0,1274\cos(8t) + 0,0064\sin(8t)\right]$$

$$z_2(t) = e^{-0,8t}\left[0,0225\cos(16t) + 0,0011\sin(16t)\right]$$

Teraz už zo vzťahu (1) redukovaného pre náš prípad

$$\mathbf{a}(t) = \begin{bmatrix} u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} = [\phi_1 \quad \phi_2]\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} 0,4082 & -0,5774 \\ 0,8165 & 0,5774 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix}$$

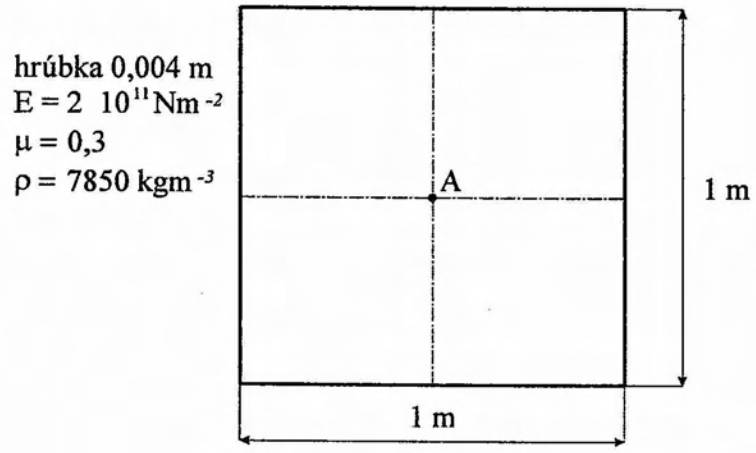
môžeme vyčísliť časové funkcie posunutí uzlových bodov (obr. 3.9).



Obrázok 3.9

Príklad 3.8

Štvorcovú dosku z príkladu 3.3 zaťažte kolmo na jej rovinu rázovým tlakom p, ktorý nadobudne hodnotu 1000 Pa v priebehu jednej stotiny sekundy a potom sa jeho hodnota už nemení. Vypočítajte časový priebeh posunutia bodu A v smere kolmo na rovinu dosky a intenzitu napätia pre čas maximálneho priehybu dosky. Doska je po celom obvode votknutá. Hodnoty modulu pružnosti v ťahu E, Poissonovho čísla μ a hustoty materiálu ρ sú udané v obrázku. Úlohu riešte metódou superpozície vlastných tvarov s tlmením. Pre tlmenie zvoľte rovnaký koeficient modálneho tlmenia pre vlastné tvary $\xi = 0{,}05$.



1. Zadanie názvu úlohy
Utility Menu>File>Change Jobname... /FILNAM = DOSKA_SUPERPOZ, OK;

2. Otvorenie predprocesora
ANSYS Main Menu>Preprocessor;

3. Zadanie typu prvku pre úlohu
Preprocessor>Element Type>Add/Edit/Delete, Add... Shell 8 node 93, OK, Close;

4. Zadanie hrúbky dosky
Preprocessor>Real Constants>Add/Edit/Delete, Add... Typ 1 SHELL 93, OK, TK(I) = 0.004, OK, Close;

5. Materiálové údaje
Preprocessor>Material Props>Material Models... Structural>Linear>Elastic>Isotropic EX = 2e11,
PRXY = 0.3, OK, >Density DENS = 7850, OK >Material>Exit;

6. Vytvorenie stredovej plochy dosky
Preprocessor>Modeling>Create>Areas>Rectangle>By Dimensions... X1 = 0, X2 = 1,
Y1 = 0, Y2 = 1, OK;

7. Vytvorenie siete 20 x 20 prvkov
Preprocessor>Meshing>Size Cntrls>ManualSize>Global>Size... SIZE = 0.05, OK;
Preprocessor>Meshing>Mesh>Areas>Mapped>3 or 4 sided... Pick All;

8. Ukončenie práce v predprocesore
Preprocessor>Finish;

9. Votknutie okrajov dosky
ANSYS Main Menu>Solution>Define Loads>Apply>Structural>Displacement>On Lines... Pick All,
All DOF, OK;

10. Zadanie maximálnej hodnoty tlaku
Solution>Define Loads>Apply>Structural>Pressure>On Areas... Pick All, VALUE = 1000, OK;

11. Výpočet vlastných frekvencií a vlastných tvarov
Solution>Analysis Type>New Analysis... Modal, OK;

12. Nastavenie volieb pre analýzu
Solution>Analysis Type>Analysis Options... No. of modes to extract = 10,
Expand mode shapes = NO, OK, Nrmkey = To mass matrix, OK;

13. Výpočet úlohy
Solution>Solve>Current LS... OK;

14. Ukončenie práce v *Solution*
ANSYS Main Menu>Finish;

15. Zadanie nového typu úlohy
ANSYS Main Menu> Solution>Analysis Type>New Analysis... Transient, OK, Mode Superps'n, OK;

16. Odstránenie zaťaženia
Define Loads>Delete>Structural>Pressure>On Areas↑ Pick ALL, OK, >*On Elements* ↑,
Pick ALL, OK;

17. Zadanie tlmenia
Solution>Load Step Opts>Time/Freqenc>Damping... DMPRAT = 0,05, OK;

18. Uloženie prvého zaťažujúceho kroku (začiatočných podmienok)
Solution>Load Step Opts>Write LS File... LSNUM = 1, OK;

19. Zapnutie neskrátenej ponuky príkazov
Solution>Unabridged Menu;

20. Údaje pre zápis vypočítaných hodnôt
Solution>Load Step Opts>Output Ctrls>DB/Results File... Freq = Every substep, OK;

21. Voľby a údaje pre druhý zaťažovací krok
Solution>Load Step Opts>Time/Frequenc>Time-Time Step... TIME = 0.01, KBC = Ramped, OK;

22. Načítanie zaťažení z modálnej analýzy
Solution>Define Loads>Apply>Load Vector>For Mode Super... Fact = 1, OK;

23. Uloženie druhého zaťažujúceho kroku na disk
Solution>Load Step Opts>Write LS File... LSNUM = 2, OK;

24. Voľby a údaje pre tretí zaťažovací krok
Solution>Load Step Opts>Time/Frequenc>Time-Time Step... TIME = 0.08, KBC = Stepped, OK;

25. Uloženie tretieho zaťažujúceho kroku na disk
Solution>Load Step Opts>Write LS File... LSNUM = 3, OK;

26. Výpočet úlohy
Solution>Solve>From LS Files... LSMIN = 1, LSMAX = 3, OK;

27. Ukončenie práce v *Solution*
ANSYS Main Menu>Finish;

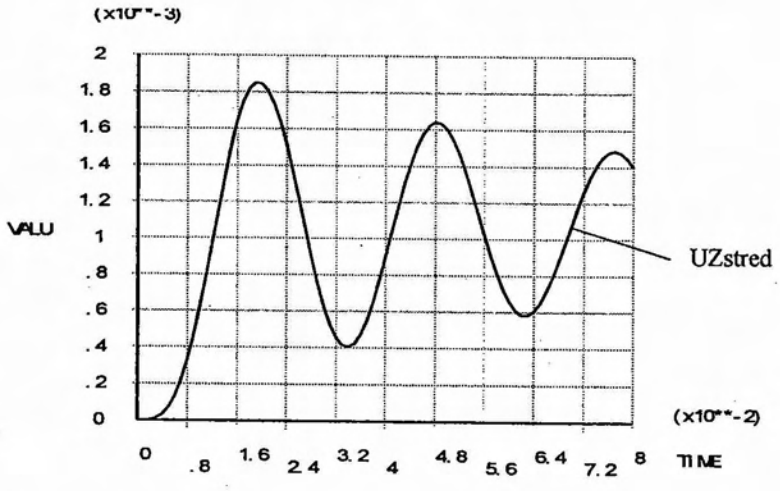
28. Otvorenie postprocesora pre časovo závislé veličiny
ANSYS Main Menu>TimeHist Postpro> (Uzavrieť *Variable Viewer)*;

29. Udanie názvu súboru s výsledkami
Príkazový riadok: file, DOSKA_SUPERPOZ, rdsp, *ENTER*;

29. Načítanie výsledkov riešenia
TimeHist Postpro>Store Data... Lab = Replace existing, OK;

30. Zadanie premennej pre grafické zobrazenie
TimeHist Postpro>Define Variables, Add... Nodal DOF Result, OK, P: Uzol v strede dosky, OK,
Name = UZstred, Comp = Translation UZ, OK, Close;

31. Zobrazenie normálového posunutia uzla v strede dosky vo vyšetrovanom časovom intervale
TimeHist Postpro>Graf Variables... NVAR1 = 2, OK;



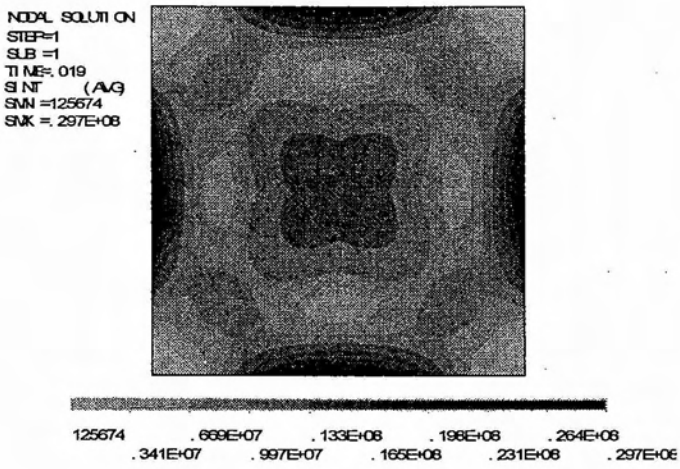
32. Zistenie času najväčšej výchylky
TimeHist Postpro>List Extremes... NVAR1 = 2, OK;

POST26 SUMMARY OF VARIABLE EXTREME VALUES

IDENTIFIERS	NAME	MINIMUM	AT TIME	MAXIMUM	AT TIME
721 UZ	UZstred	0.1071E-10	0.000	0.1852E-02	0.1900E-01

33. Výpočet napätí pre čas najväčšej výchylky
ANSYS Main Menu>Solution>Analysis Type>ExpansionPass... EXPASS = ON, OK;
Solution>Load Step Opts> ExpansionPass>Single Expand>By Time/Freq...
TIMFRQ = 0.019, Elcalc = Yes, OK;
Solution>Solve>Current LS... OK;

34. Znázornenie rozloženia intenzity napätia pre čas maximálnej výchylky dosky
ANSYS Main Menu>General Postproc>Plot Results>Contour Plot>Nodal Solu... Stress, Intensity SINT, OK;



Poznámky k príkladu

1. Výpočtový model je rovnaký ako v príklade 3.3, kde sa pre túto sústavu počítali vlastné frekvencie a vlastné tvary kmitania. Práce v predprocesore, t. j. tvorba modelu, je pri oboch príkladoch rovnaká a príklady sa líšia až od miesta, kde sa zadáva tlakové zaťaženie dosky (príkaz č. 10). Pokiaľ máme databázu uvedeného príkladu uloženú, možno ju načítať príkazom *Utility Menu>File>Resume from* ... P: Názov_databázy, OK a riešiť novú úlohu od príkazu č. 10. Vypočítané vlastné tvary v tomto prípade nie je potrebné expandovať.
2. Dôležitou aplikačnou zvláštnosťou tejto metódy je, že po výpočte vlastných tvarov, vo fáze tvorby zaťažujúcich krokov, možno už priamo zadávať len sústredené sily a translačné posunutia. Prvkové zaťaženia (tlaky, teploty a pod.) treba zadať vo fáze modálnej analýzy; uložia sa do vektora, s ktorým potom možno manipulovať vo fáze tvorby zaťažujúcich krokov. V príslušnom kroku ho možno zapnúť v plnej hodnote (príkaz č. 22), lineárne meniť pomocou násobku FACT, respektíve vymazať pomocou veľmi malého násobku, alebo príkazom DELETE. V príklade sme ho zapli v 2. kroku a nakoľko sme ho nemenili, pôsobilo toto zaťaženie v nezmenenej hodnote aj v 3. kroku.
3. Prvý zaťažovací krok pri tejto metóde je vždy statický, určuje začiatočné podmienky. Pretože v príklade pri tomto kroku na teleso nepôsobilo žiadne zaťaženie, výpočet vychádzal z nulových hodnôt posunutí, rýchlostí a zrýchlení telesa. Vhodnou voľbou zaťaženia, koncového času a časového kroku pre prvý zaťažovací krok možno zadať rôzne typy začiatočných podmienok (čo platí aj pre ostatné metódy výpočtu dynamických úloh – pozri manuál programu).
4. V niektorých príkazoch sme nezadali dôležité údaje, pretože nám vyhovovala implicitne nastavená hodnota v programe. Bol to napr. počet vlastných tvarov, ktoré program využíva pri ich superpozícii – program v takomto prípade využíva všetky vlastné tvary vypočítané v modálnej analýze. Nezadávali sme tiež integračný časový krok; program v takomto prípade volí krok, ktorý poskytne 20 vypočítaných bodov pre jeden cyklus najvyššieho vlastného tvaru zahrnutého do superpozície.

3.7 Harmonická analýza

V technickej praxi sa často stretávame s nestacionárnymi pevnostnými úlohami, pri ktorých sú teleso, resp. konštrukcia zaťažené cyklickými silami, ktoré majú konštantné amplitúdy a rovnakú frekvenciu. Takéto úlohy sa, pochopiteľne, v MKP zadávajú a riešia tak, aby sa táto zvláštnosť úlohy maximálne využila tak pri zadávaní zaťaženia, ako aj pri vlastnom numerickom riešení.

Ak formuláciu takejto úlohy urobíme vo výhodnom komplexnom tvare (napr. [18]), potom vektor uzlových zložiek vonkajších síl telesa môžeme zapísať v tvare

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_{max}\left(\cos\psi + i\sin\psi\right)e^{i\Omega t} \tag{3.7- 1}$$

kde vektor $\mathbf{f}_{max}$ obsahuje amplitúdy síl, ψ je fáza a Ω je uhlová frekvencia týchto síl. Tento vzťah môžeme upraviť na tvar

$$\mathbf{f} = \left(\mathbf{f}_1 + i\mathbf{f}_2\right)e^{i\Omega t} \tag{3.7- 2}$$

kde vektory

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_1 &= \mathbf{f}_{max}\cos\psi \\ \mathbf{f}_2 &= \mathbf{f}_{max}\sin\psi\end{aligned} \tag{3.7- 3}$$

obsahujú reálne a imaginárne zložky amplitúd uzlových síl. V prípade nulovej fázy zaťaženia dostávame

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_1 &= \mathbf{f}_{max} \\ \mathbf{f}_2 &= \mathbf{0}\end{aligned} \tag{3.7- 4}$$

Rovnako môžeme rozložiť aj hľadané (neznáme) veličiny. Napr. nestacionárne posunutia uzlových bodov budeme hľadať v tvare

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{max}\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)e^{i\Omega t} \tag{3.7- 5}$$

alebo v tvare analogickom k (3)

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_1 &= \mathbf{a}_{max}\cos\varphi \\ \mathbf{a}_2 &= \mathbf{a}_{max}\sin\varphi\end{aligned} \tag{3.7- 6}$$

Posunutia majú rovnakú frekvenciu ako zaťažujúce sily, ale fáza φ je pri úlohách s tlmením rozdielna. Vektory rýchlostí $\dot{\mathbf{a}}$ a zrýchlení uzlových bodov telesa $\ddot{\mathbf{a}}$ v komplexnom tvare dostaneme derivovaním (5) podľa času t.

Pri riešení vychádzame zo všeobecného tvaru pohybových rovníc (3.1 –10)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f} \tag{3.7- 7}$$

Ak do tejto rovnice dosadíme komplexné vektory posunutí, rýchlostí a zrýchlení, dostaneme po jednoduchej úprave sústavu rovníc v tvare

$$\left(\mathbf{K} - \Omega^2\mathbf{M} + i\Omega\mathbf{C}\right)\left(\mathbf{a}_1 + i\mathbf{a}_2\right) = \mathbf{f}_1 + i\mathbf{f}_2 \tag{3.7- 8}$$

ktorú programy MKP riešia v komplexnej aritmetike rovnako ako statickú úlohu. Pri frekvenčnej analýze s krokom $\Delta\Omega$ možeme opäť zvoliť priamu integráciu alebo metódu superpozície vlastných tvarov.

Z (8) dostaneme od času nezávislý komplexný vektor posunutí uzlových bodov telesa so zložkami posunutí vo forme kompexných čísiel s reálnou a imaginárnou časťou

$$\mathbf{a}(\Omega)=\left[\mathbf{a}_1(\Omega)+i\mathbf{a}_2(\Omega)\right]=\begin{bmatrix} a_{11}(\Omega)+ia_{12}(\Omega) \\ a_{21}(\Omega)+ia_{22}(\Omega) \\ \vdots \\ a_{NVT1}(\Omega)+ia_{NVT2}(\Omega) \end{bmatrix} \tag{3.7- 9}$$

Amplitúdu pre ľubovoľný globálny *k*–ty stupeň voľnosti telesa potom vypočítame ako absolútnu veľkosť príslušnej komplexnej hodnoty

$$a_{k\max}=\sqrt{a_{k1}^2+a_{k2}^2} \tag{3.7- 10}$$

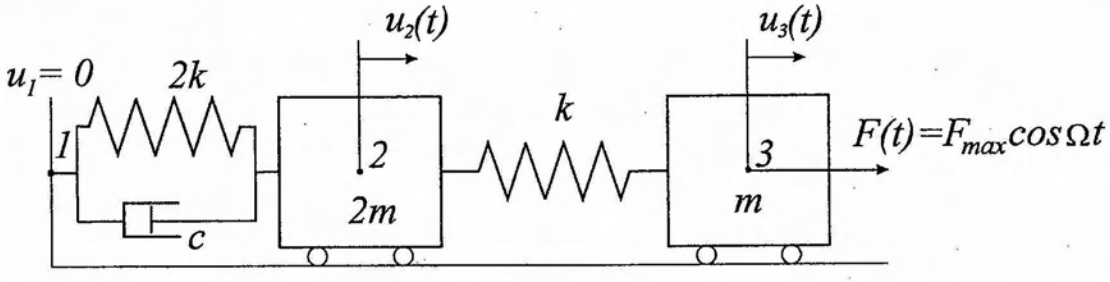
a fázu zo vzťahu

$$\varphi_k=\arctan\left(\frac{a_{k2}}{a_{k1}}\right) \tag{3.7- 11}$$

Veľmi často sa úloha rieši tak, že sa zvolí frekvenčný interval, obyčajne v okolí niektorej vlastnej frekvencie telesa, ktorý sa rozdelí na väčší počet frekvenčných bodov a v jednom výpočtovom behu programu sa vypočítajú a (obyčajne graficky) analyzujú hľadané veličiny pre celý frekvenčný rozsah. (Poznamenávame, že pri zadávaní i vyhodnocovaní úlohy v programe sa pracuje s frekvenciami a nie s uhlovými frekvenciami a fázové uhly sú udávané v stupňoch.) Pre výstup vypočítaných veličín v grafickom alebo numerickom tvare si môžeme zvoliť dve formy: reálnu a imaginárnu časť veličiny, resp. jej amplitúdu a fázový uhol.

Príklad 3.9

Jednorozmerná dvojhmotová sústava s dvomi pružinami a viskóznym tlmičom na obrázku je v uzle č. 3 zaťažená harmonicky sa meniacou silou $F(t)=F_{\max}\cos\Omega t$. Vypočítajte a graficky znázornite amplitúdy kmitania uzlov č. 2 a 3 v rozsahu budiacej frekvencie sily $f=\Omega/(2\pi)=0$ až 3 Hz s hustotou Δf = 0,01 Hz. Dané je: k = 128 Nm^{-1}, m = 1 kg, $F_{\max}$ = 10 N, c = 10 Nm^{-1}s^2. Úlohu riešte pomocou programu ANSYS.



1. Zadanie názvu úlohy
Utility Menu>File>Change Jobname... /FILNAM = HARM_2HMOTY, OK;

2. Otvorenie predprocesora
ANSYS Main Menu>Preprocessor;

3. Zadanie typu prvkov pre úlohu
Preprocessor>Element Type>Add/Edit/Delete, Add... Combination Spring-damper 14, OK, Add...,
Structural Mass, 3D Mass 21, OK, Close;

4. Zadanie štyroch prvkových konštánt
Preprocessor>Real Constants>Add/Edit/Delete, Add... Typ 1 COMBIN14, OK, K = 256, CV1 = 10, OK, *Add...* Typ 1 COMBIN14, OK, K = 128, *Add...* Typ 2 MASS21, OK, MASSX = 2, OK, *Add...* Typ 2 MASS21, OK, MASSX = 1, OK, Close;

5. Zapnutie trvalého číslovania uzlových bodov kvôli kontrole
*Utility Menu>PlotCtrls>Numbering...*NODE = ON, OK;

6. Vytvorenie uzlových bodov úlohy (číslovanie je automatické)
Preprocessor>Modeling>Create>Nodes>In Active CS... X = 0, Y = 0, Apply,
X = 1, Y = 0, Apply,
X = 2, Y = 0, OK;

7. Aktualizácia údajov pre prvý pružinový prvok
Preprocessor>Modeling>Create>Elements>Elem Attributes Typ 1 COMBIN14,
REAL=1, OK;

8. Vytvorenie prvého pružinového prvku
Preprocessor>Modeling>Create>Elements>Auto Numbered>Thru Nodes↑ P: Uzol 1,
P: Uzol 2, OK;

9. Aktualizácia údajov pre druhý pružinový prvok
Preprocessor>Modeling>Create>Elements>Elem Attributes... Typ 1 COMBIN14,
REAL=2, OK;

10. Vytvorenie druhého pružinového prvku
Preprocessor>Modeling>Create>Elements>Auto Numbered>Thru Nodes↑ P: Uzol 2,
P: Uzol 3, OK;

11. Aktualizácia údajov pre prvý prvok bodovej hmotnosti
Preprocessor>Modeling>Create>Elements>Elem Attributes... Typ 2 MASS 21,
REAL=3, OK;

12. Vytvorenie prvého prvku bodovej hmotnosti
Preprocessor>Modeling>Create>Elements>Auto Numbered>Thru Nodes↑ P: Uzol 2, OK;

13. Aktualizácia údajov pre druhý prvok bodovej hmotnosti
Preprocessor>Modeling>Create>Elements>Elem Attributes... Typ 2 MASS 21,
REAL=4, OK;

14. Vytvorenie druhého prvku bodovej hmotnosti
Preprocessor>Modeling>Create>Elements>Auto Numbered>Thru Nodes↑ P: Uzol 3, OK;

15. Ukončenie práce v predprocesore
Preprocessor>Finish;

16. Upevnenie uzla č. 1
Ansys Main Menu>Solution>Define Loads>Apply>Structural>Displacement>On Nodes↑
P: Uzol 1, OK,All DOF, OK;

17. Zadanie typu analýzy
Solution>Analysis Type>New Analysis... Harmonic, OK;

18. Voľby pre typ analýzy
Solution>Analysis Type>Analysis Option... HROPT = Full, HROUT = Amplitud + phase, OK, OK;

18. Zadanie sily do uzla č. 3
Define Loads>Apply>Structural>Force/Moment>On Nodes↑
P: Uzol 3, OK, Lab = FX, VALUE = 10, OK;

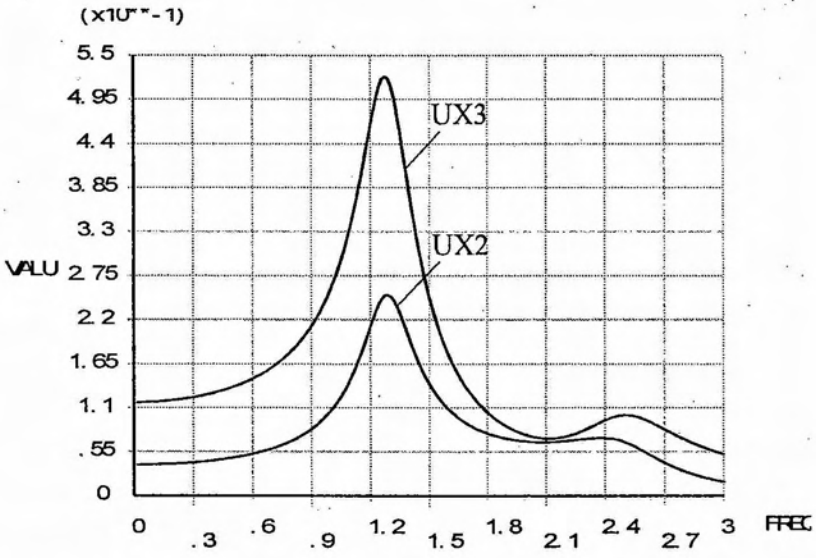
19. Zápis výsledkov pre všetky subkroky výpočtu
Solution>Load Step Opts>DB/Results File... FREQ = Every substep, OK;

20. Rozsah vyšetrovaných frekvencií
Solution>Load Step Opts>Time/Frequenc>Freq and Substps...
HARFRQ = 0, 3, NSUBST = 300, KBC = Stepped, OK;

21. Výpočet úlohy
Solution>Solve>Current LS... OK;

22. Ukončenie práce v *Solution*
ANSYS Main Menu>Finish;

23. Grafické zobrazenie amplitúd kmitania uzla č.2 pomocou *Variable Viewer*
ANSYS Main Menu>TimeHist Postpro> P: Prvú ikonu zľava (*Add data*), Nodal Solution, DOF Solution, X-Component of displacement, OK, P: Uzol č.2, Apply, X-Component of displacement, OK, P: Uzol č.2, OK, Vyznačte UX_2 a UX_3, P: Tretiu ikonu zľava (*Graph Data*), File, Close;



24. Ukončenie práce s úlohou
Ansys Toolbar>Quit... Save Geom+Loads, OK;

3.8 Redukcia matíc úlohy

Metódy redukcie matíc výpočtového modelu sa v MKP využívajú na zvyšovanie efektívnosti výpočtu a znižovanie výpočtového času veľkých úloh. Tieto postupy sa najčastejšie využívajú pri riešení dynamických úloh (modálna analýza, harmonická analýza, všeobecné nestacionárne úlohy); pri statických úlohách je tento postup známy vo forme tvorby superelementov (*superelements*) a subkonštrukcií (*substructures*).

Na uvedený účel sa v programoch MKP využívajú procedúry, ktorých teoretický základ možno demonštrovať na redukcii matíc využívaných pri modálnej analýze. Pri tejto úlohe sa rieši zovšeobecnený problém vlastných čísiel definovaný rovnicami (3.3 –3)

$$\mathbf{K}\phi = \omega^2\mathbf{M}\phi \qquad (3.8\text{- }1)$$

kde matica tuhosti a matica hmotnosti sú symetrické štvorcové matice n x n a ϕ je vektor n x 1. Pri väčšine pevnostných dynamických úloh sa obyčajne zaujímame len o určitý počet najnižších vlastných frekvencií a vlastných tvarov telesa. Proces výpočtu týchto hodnôt bude efektívnejší, keď z neho vylúčime tie stupne voľnosti výpočtového modelu telesa, ktoré sú zviazné predovšetkým s vyššími frekvenciami a ponecháme v ňom len tie, ktoré sú pre dynamické vlastnosti telesa rozhodujúce. Ponechané stupne voľnosti nazývame *hlavné* (*master*) a vylúčené označujeme ako *podriadené* (*slave*). Hlavné stupne voľnosti (posunutia a natočenia) volíme v smeroch predpokladaného kmitania a v miestach kde očakávame ich významné hodnoty. Vzťah medzi hlavnými a podriadenými stupňami voľnosti sa volí v tvare

$$\boldsymbol{\phi} = \mathbf{G}\mathbf{a} \tag{3.8- 2}$$

kde $\mathbf{a}$ je vektor m x 1 obsahujúci hlavné stupne voľnosti a $\mathbf{G}$ je matica koeficientov n x m, vyjadrujúca vzťah medzi hlavnými a podriadenými stupňami voľnosti. Dosadením tohoto vzťahu do (1) a vynásobením oboch strán zľava maticou $\mathbf{G}^T$ dostaneme

$$\bar{\mathbf{K}}\mathbf{a} = \omega^2 \bar{\mathbf{M}}\mathbf{a} \tag{3.8- 3}$$

kde redukovaná matica tuhosti a redukovaná matica hmotnosti s *redukovanými (zmenšenými) rozmermi* m x m sú

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{K}} &= \mathbf{G}^T\mathbf{K}\mathbf{G} \\ \bar{\mathbf{M}} &= \mathbf{G}^T\mathbf{M}\mathbf{G} \end{aligned} \tag{3.8- 4}$$

Z redukovaných rovníc (3) možno takto vypočítať m vlastných frekvencií a po určení vektorov $\mathbf{a}$ z (2) aj m vlastných tvarov *pôvodného* problému (1).

Je zrejmé, že úspech takéhoto postupu bude záležať na vhodnej voľbe hlavných stupňov voľnosti a na ich vzťahu ku všetkým stupňom voľnosti úlohy, ktorý definuje matica $\mathbf{G}$. Jednotlivé metódy redukcie matíc sa od seba líšia práve voľbou tejto redukčnej matice. Pri tzv. Guyanovej metóde redukcie [19] (*Guyan reduction*), sa na určenie vzťahu medzi hlavnými a podriadenými stupňami voľnosti využíva statická analýza. Za predpokladu, že *na podriadené uzly nepôsobí žiadne zaťaženie*, statické podmienky rovnováhy úlohy (2.5- 13) môžeme rozpísať do tvaru

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{mm} & \mathbf{K}_{ms} \\ \mathbf{K}_{sm} & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_m \\ \mathbf{a}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_m \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{3.8- 5}$$

kde vektor $\mathbf{a}_m$ obsahuje hlavné stupne a $\mathbf{a}_s$ podriadené stupne voľnosti. Zo symetrie matice tuhosti vyplýva, že aj submatice $\mathbf{K}_{mm}$ a $\mathbf{K}_{ss}$ sú symetrické a $\mathbf{K}_{ms} = \mathbf{K}_{sm}$. Z druhej maticovej rovnice v (5) možno vyjadriť podriadené stupne voľnosti pomocou hlavných stupňov voľnosti

$$\mathbf{a}_s = -\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{sm}\mathbf{a}_m$$

a zo vzťahu

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_m \\ \mathbf{a}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{sm} \end{bmatrix} \mathbf{a}_m$$

dostaneme redukčnú maticu

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{sm} \end{bmatrix} \tag{3.8- 6}$$

kde **I** je jednotková matica m x m. Redukované matice tuhosti a hmotnosti vyjadríme zo vzťahov (4), kam dosadíme maticu (6) a podľa hlavných a podriadených stupňov voľnosti rozdelené matice **K** a **M**

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{K}_{mm} - \mathbf{K}_{ms}\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{sm} \tag{3.8- 7}$$

$$\bar{\mathbf{M}} = \mathbf{M}_{mm} - \mathbf{K}_{ms}\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{M}_{sm} - \mathbf{M}_{ms}\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{sm} + \mathbf{K}_{ms}\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{M}_{ss}\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{sm} \tag{3.8- 8}$$

Uvedená redukcia matíc sa v MKP využíva nielen pri modálnej analýze, ale aj pri tzv. redukovanej metóde riešenia dynamických úloh. Pôvodná úloha vyjadrená rovnicami (3.1- 10)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{a}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{a}(t) = \mathbf{f}(t) \tag{3.8- 9}$$

sa nahradzuje redukovanou sústavou rovníc

$$\bar{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{a}}_m + \bar{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{a}}_m + \bar{\mathbf{K}}\mathbf{a}_m = \mathbf{f}_m(t) \tag{3.8- 10}$$

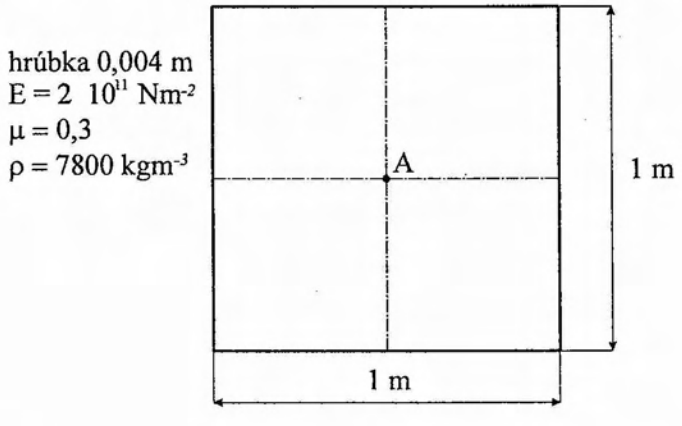
pričom sa matica tlmenia redukuje rovnako ako matica hmotnosti

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}_{mm} - \mathbf{K}_{ms}\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{C}_{sm} - \mathbf{C}_{ms}\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{sm} + \mathbf{K}_{ms}\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{C}_{ss}\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{sm} \tag{3.8- 11}$$

Úspory strojového času pri takomto postupe sú značné. Pomer n ku m môže byť niekoľko tisíc i viac. Navyše poznamenávame, že dynamické vlastnosti veľmi veľkých priestorových, resp. škrupinových úloh, pri ktorých už samotný statický výpočet je časovo veľmi náročný, možno efektívne analyzovať len redukovanou metódou.

Príklad 3.10

Štvorcovú dosku z príkladu 3.3 zaťažte v bode A kolmo na jej rovinu rázovou silou F, ktorá nadobudne hodnotu 300 N v priebehu jednej stotiny sekundy a potom sa jej hodnota už nemení. Vypočítajte časový priebeh posunutia bodu A v smere kolmo na rovinu dosky. Doska je po celom obvode votknutá. Hodnoty modulu pružnosti v ťahu E, Poissonovho čísla μ a hustoty materiálu ρ sú udané v obrázku. Úlohu riešte redukovanou metódou s proporciálnym tlmením s koeficientami $\alpha = 0$, $\beta = 0.0001$. Analyzujte časový interval 1 sekundy.



1. Zadanie názvu úlohy
Utility Menu>File>Change Jobname... /FILNAM = DOSKA_REDUK, OK;

2. Otvorenie predprocesora
ANSYS Main Menu>Preprocessor;

3. Zadanie typu prvku pre úlohu
Preprocessor>Element Type>Add/Edit/Delete, Add... Shell 8 node 93, OK, Close;

4. Zadanie hrúbky dosky
Preprocessor>Real Constants>Add/Edit/Delete, Add... Typ 1 SHELL 93, OK, TK(I) = 0.004, OK, Close;

5. Materiálové údaje
Preprocessor>Material Props>Material Models... Structural>Linear>Elastic>Isotropic EX = 2e11, PRXY = 0.3, OK, >Density DENS = 7850, OK >Material>Exit;

6. Vytvorenie stredovej plochy dosky
Preprocessor>Modeling>Create>Areas>Rectangle>By Dimensions... X1 = 0, X2 = 1, Y1 = 0, Y2 = 1, OK;

7. Vytvorenie siete 20 x 20 prvkov
Preprocessor>Meshing>Size Cntrls>ManualSize>Global>Size... SIZE = 0.05, OK;
Preprocessor>Meshing>Mesh>Areas>Mapped>3 or 4 sided↑ Pick All;

8. Ukončenie práce v predprocesore
Preprocessor>Finish;

9. Votknutie okrajov dosky
ANSYS Main Menu>Solution>Define Loads>Apply>Structural>Displacement>On Lines↑ Pick All, All DOF, OK;

10. Typ analýzy
Solution>Analysis Type>New Analysis... Transient, OK, Reduced, OK;

11. Zadanie hlavných stupňov voľnosti
Solution>Master DOFs>User Selected>Define↑ P: Uzol v strede dosky, Lab1 = UZ, OK;

12. Zadanie tlmenia
Solution>Analysis Type>Analysis Options... TRNOPT = Include, OK;
Solution>Load Step Opts>Time/Freqenc>Damping... ALPHAD = 0, BETAD = 0.0001, OK;

13. Zapnutie neskrátenej ponuky príkazov
Solution>Unabridged Menu;

14. Údaje pre zápis vypočítaných hodnôt
Solution>Load Step Opts>Output Ctrls>DB/Results File... Freq = Every substep, OK;

15. Zadanie a výpočet prvého zaťažujúceho kroku (začiatočných podmienok)
Solution>Load Step Opts>Time/Frequenc>Time – Time Step... TIME = 0, DELTIM = 0.001, OK;
Solution>Solve>Current LS, OK;

16. Zadanie maximálnej hodnoty sily
Solution>Define Loads>Apply>Structural>Force/Moment>On Nodes↑ P: Uzol v strede dosky, Lab = FZ, VALUE = 300, OK;

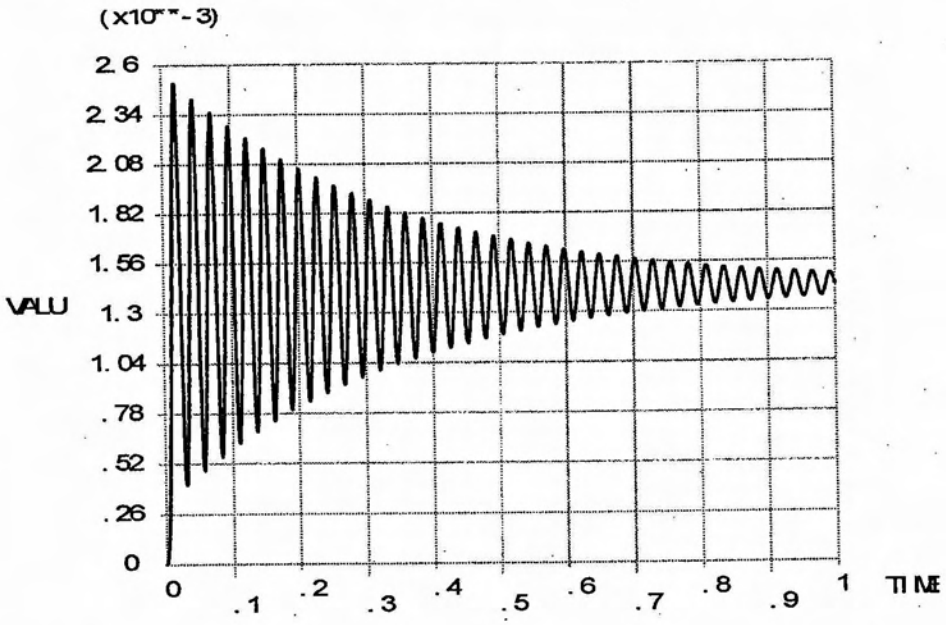
17. Zadanie a výpočet druhého zaťažovacieho kroku
Solution>Load Step Opts>Time/Frequenc>Time-Time Step... TIME = 0.01, KBC = Ramped, OK;
Solution>Solve>Current LS... OK;

18. Zadanie a výpočet tretieho zaťažovacieho kroku
Solution>Load Step Opts>Time/Frequenc>Time-Time Step... TIME = 1, KBC = Stepped, OK;
Solution>Solve>Current LS... OK;

19. Ukončenie práce v *Solution*
ANSYS Main Menu>Finish;

20. Otvorenie postprocesora pre časovo závislé veličiny
ANSYS Main Menu>TimeHist Postpro... (Otvorí sa *Variable Viewer* – v hornom riadku musí byť vyznačený názov výsledkového súboru s príponou *rdsp* !);

21. Grafické zobrazenie kmitania stredu dosky pomocou *Variable Viewer*
ANSYS Main Menu>TimeHist Postpro> P: Prvú ikonu zľava (*Add data*), Nodal Solution, DOF Solution, Z-Component of displacement, OK, P: Uzol v strede dosky, OK, P: Tretiu ikonu zľava (*Graph Data*), File, Close;



Poznámky k príkladu

1. Výpočtový model je rovnaký ako v príklade 3.3, kde sa pre túto sústavu počítali vlastné frekvencie a vlastné tvary kmitania. Práce v predprocesore, t. j. tvorba modelu, je pri oboch príkladoch rovnaká a príklady sa líšia až od miesta, kde sa určuje typ výpočtu (príkaz č. 10). Pokiaľ máme databázu uvedeného príkladu uloženú, možno ju načítať príkazom *Utility Menu>File>Resume from* ... P: Názov_databázy, OK a riešiť novú úlohu od príkazu č. 10.
2. Prvý zaťažovací krok pri tejto metóde je vždy statický, určuje začiatočné podmienky. Pretože v príklade pri tomto kroku na teleso nepôsobilo žiadne zaťaženie, výpočet vychádzal z nulových hodnôt posunutí, rýchlostí a zrýchlení telesa. Vhodnou voľbou zaťaženia, koncového času a časového kroku pre prvý zaťažovací krok možno zadať rôzne typy začiatočných podmienok (čo platí aj pre ostatné metódy výpočtu dynamických úloh - pozri manuál programu).
3. Ako vidieť, zaťažujúce kroky môžeme riešiť aj postupne, bez ukladania na disk. Nesmieme však pri tom uzavrieť *Solution*, pretože náväznosť krokov by sa narušila.
4. Treba si uvedomiť, že informácie o kmitaní telesa dostaneme len v bodoch, kde sme zvolili hlavné stupne voľnosti a len o zvolených hodnotách (zložkách posunutí a natočení).
5. V ľubovoľnom časovom kroku môžeme opätovne extrahovať napätia rovnakým spôsobom ako v príklade 3.8.

4 PRENOS TEPLA VEDENÍM

Jednou z dôležitých úloh výpočtárskej praxe je výpočet stacionárneho (ustáleného) resp. nestacionárneho (časovo závislého) teplotného poľa v telese, t. j. nájdenie rozdelenia teploty v telese pri známej začiatočnej podmienke a zadaných okrajových podmienkach. Riešenie takejto úlohy má význam nielen z termokinetického hľadiska, ale i z hľadiska pevnostného, pretože teplotné pole vyvoláva v telese vo všeobecnosti tzv. teplotné napätia (napätia vyvolané teplotným poľom).

Na riešenie úloh prenosu tepla možno veľmi efektívne použiť MKP, pričom, ako sme už uviedli, je možné využiť všetky základné postupy (i univerzálne časti programov), s ktorými sme sa zoznámili pri pevnostných úlohách.

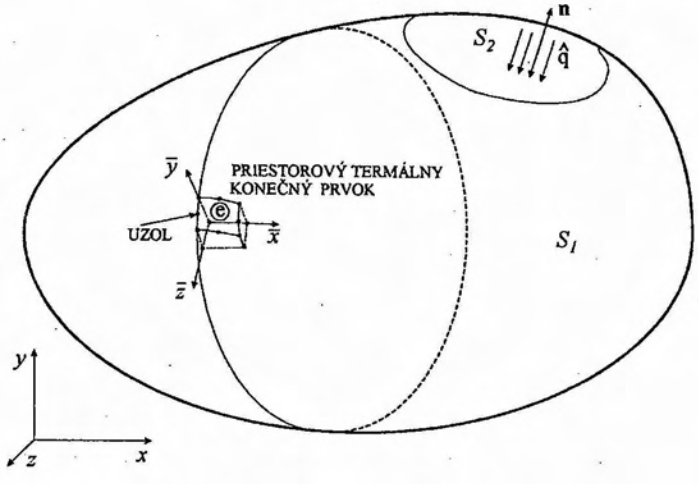
Pretože sa budeme zaoberať len lineárnymi úlohami, platia tieto predpoklady:

- Materiálové parametre sú konštantné – nie sú závislé na teplote ani čase
- V telese nedochádza k fázovým premenám
- Prenos tepla radiáciou (žiarením) sa neuvažuje

4.1 Formulácia úlohy

Pre funkciu teploty $T \equiv T(x,y,z,t)$ opisujúcu nestacionárne teplotné pole vo všeobecnom termálne ortotropnom telese (obr. 4.1) platí diferenciálna rovnica (pozri napr. [12])

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z}\right)+\overline{q}=\rho c \frac{\partial T}{\partial t} \qquad (4.1)$$



Obrázok 4.1 Všeobecné priestorové teleso s nestacionárnym teplotným poľom

kde je

ρ ... hustota materiálu telesa v kgm^{-3}

c ... merné teplo materiálu telesa v $Jkg^{-1}K^{-1}$

t ... čas v sekundách

$\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ ... súčinitele tepelnej vodivosti vo $Wm^{-1}K^{-1}$

$\overline{q}$ ... výdatnosť tepelného zdroja v telese (prírastok tepla v jednotke objemu za jednotku času) vo Wm^{-3}

Nerovnomerné rozdelenie teploty v telese vyvolá tepelný tok q (vo Wm^{-2})

$$q(x,y,z,t) = -\left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z}\right) \tag{4.2}$$

ktorý po určení funkcie T možno vypočítať z uvedeného vzťahu.

Pretože (1) je diferenciálna rovnica 1. rádu vzhľadom na čas, musíme pre ňu zadať jednu *začiatočnú podmienku*

$$T(x,y,z,t=0) = T_0(x,y,z) \tag{4.3}$$

kde funkcia T_0 udáva rozdelenie teploty na začiatku riešenia úlohy v celom objeme telesa.

Okrem toho pre diferenciálnu rovnicu 2. rádu (vzhľadom na polohové premenné) musíme zadať dve *okrajové podmienky*. Dirichletova okrajová podmienka v tomto prípade je

$$T(x,y,z,t) = T_1(x,y,z,t) \qquad \text{na } S_1 \tag{4.4}$$

kde S_1 je časť povrchu telesa, kde sme predpísali teplotu.

Cauchyho okrajová podmienka predpisuje tepelný tok $\hat{q}$ (vo Wm^{-2}) cez plochu S_2

$$\hat{q} = \lambda_n \frac{\partial T}{\partial n} = \lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}\cos\alpha + \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y}\cos\beta + \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z}\cos\gamma \qquad \text{na } S_2 \tag{4.5}$$

kde vystupujú smerové kosínusy vonkajšej normály k ploche. Vo všeobecnosti plochy S_1 a S_2 predstavujú súhrn viacerých plôch príslušného typu a platí $S_1 \cup S_2 = S$, $S_1 \cap S_2 = 0$, kde S je celkový povrch telesa.

Programy MKP na nezadané „povinné“ podmienky väčšinou reagujú takto (je užitočné si to overiť)

- Nezadaná začiatočná podmienka $\Rightarrow$ vo všetkých bodoch telesa je na začiatku riešenia úlohy teplota rovná nule
- Nezadaná okrajová podmienka pre teplotu $\Rightarrow$ vo všetkých bodoch povrchu telesa platí podmienka pre tepelný tok, t.j. $S_2 = S$.
- Nezadaná okrajová podmienka pre tepelný tok $\Rightarrow$ vo všetkých bodoch povrchu telesa (kde nie je zadaná okrajová podmienka pre teplotu) je tepelný tok rovný nule – teleso je teda na ploche S_2 tepelne izolované.

Z uvedeného vyplýva aj to, že v prípade rovinných úloh je teleso v smere kolmom na rovinu riešenia tepelne izolované.

Pri úlohách vedenia tepla okrem „povinných“ okrajových podmienok možno v programoch MKP zadávať ďalšie podmienky:

- Teplotu a tepelný tok v uzlových bodoch telesa
- Tepelný zdroj v uzlových bodoch a prvkoch telesa
- Prostredníctvom vzťahu (5) konvektívne okrajové podmienky s tepelným tokom

$$\hat{q} = h\left(T_{tek} - T\right) \tag{4.6}$$

kde h je zadaný koeficient prestupovej vrstvy vo $WK^{-1}m^{-2}$ a T_{tek} je známa (zadaná) teplota tekutiny.

Možno dokázať (napr. [10]), že funkcia $T(x,y,z,t)$ spĺňajúca rovnicu (1) je vo variačnej formulácii ekvivalentná funkcii, ktorá minimalizuje funkcionál

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_V \left[\lambda_x\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \lambda_y\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 + \lambda_z\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2 - 2\left(\overline{q} - \rho c\frac{\partial T}{\partial t}\right)T\right]dV + \int_{S_{2q}} \hat{q}T\,dS + \frac{1}{2}\int_{S_{2k}} h\left(T - T_{tek}\right)^2 dS \tag{4.7}$$

kde S_{2q} je plocha so zadaným teplotným tokom $\hat{q}$ a S_{2k} je plocha s konvektívnym prestupom (tokom) tepla; V je objem telesa. Variačná formulácia nestacionárnej úlohy prenosu tepla pre teleso potom znie takto: Treba nájsť takú funkciu $T(x,y,z,t)$, ktorá spĺňa začiatočnú podmienku (3) a okrajové podmienky (4), (5), že pri nej integrál (7) nadobúda minimálnu hodnotu. Takáto funkcia exaktne vyjadruje veľkosť teplôt v čase t v bodoch (x, y, z) telesa.

4.2 Geometrická a časová diskretizácia úlohy. Matice prvku a telesa

Podľa rovnakých zásad ako pri riešení pevnostnej úlohy rozdelíme teleso na konečné prvky a vyznačíme uzlové body. Nech celkový počet prvkov je *NET* a na každom prvku nech je *NUE* uzlových bodov. Funkcia, ktorá v čase t aproximuje rozdelenie teploty po prvku z jej hodnôt v uzlových bodoch, bude

$$T^e(x,y,z,t) = \left[N_1(x,y,z), N_2, \cdots, N_i, \cdots, N_{NUE}\right]\begin{bmatrix} T_1(t) \\ T_2 \\ \vdots \\ T_i \\ \vdots \\ T_{NUE} \end{bmatrix} = \mathbf{N}_e\mathbf{T}^e \tag{4.8}$$

kde stĺpcová matica $\mathbf{T}^e(t)$ obsahuje teploty uzlových bodov prvku (sú to primárne neznáme úlohy analogické k zložkám posunutí $\mathbf{a}^e$ pri pevnostnej úlohe) a $\mathbf{N}_e(x,y,z)$ je matica interpolačných funkcií prvku. Teraz je to riadková matica, pretože teplota je skalárna veličina. (O tejto matici platí všetko, čo platilo pri pevnostných úlohách. Geometria prvkov je rovnaká bez ohľadu na typ úlohy a z geometrického hľadiska budeme tvoriť model telesa pomocou tých istých typov prvkov, aké sme používali pri pevnostných úlohách).

Funkcionál (7) vyjadríme ako sumu jeho hodnôt na prvkoch telesa

$$\Pi = \sum_{e=1}^{NET} \Pi_e \tag{4.9}$$

kde podľa (7) je

$$\Pi_e = \frac{1}{2}\int_{V_e}\left\{\left[\lambda_x^e, \lambda_y^e, \lambda_z^e\right]\begin{bmatrix}\left(\frac{\partial T^e}{\partial x}\right)^2 \\ \left(\frac{\partial T^e}{\partial y}\right)^2 \\ \left(\frac{\partial T^e}{\partial z}\right)^2\end{bmatrix} - 2\left(\bar{q}_e - \rho_e c_e \frac{\partial T^e}{\partial t}\right)T^e\right\}dV + \int_{S_{2q}^e}\hat{q}_e T^e dS + \frac{1}{2}\int_{S_{2k}^e} h_e\left(T^e - T_{tek}\right)^2 dS \tag{4.10}$$

Podmienku minimalizácie funkcionálu pre výpočtový model telesa teraz môžeme zapísať takto

$$\frac{\partial \Pi}{\partial T_i} = \sum_{e=1}^{NET}\left(\frac{\partial \Pi_e}{\partial T_i}\right) = 0 \qquad i = 1, 2, ..., \text{NUE} \tag{4.11}$$

Na rozdiel od pevnostnej úlohy nebudeme v tomto prípade vyjadrovať hodnotu prvkového funkcionálu, ale priamo jeho deriváciu podľa primárnej neznámej, čo odstráni nepríjemné mocniny v prvom člene prvkového potenciálu (10).

Pre deriváciu za sumačným znamienkom v (11) dostávame

$$\frac{\partial \Pi_e}{\partial T_i} = \int_{V_e}\left\{\left[\lambda_x^e, \lambda_y^e, \lambda_z^e\right]\begin{bmatrix}\frac{\partial T^e}{\partial x}\frac{\partial}{\partial T_i}\left(\frac{\partial T^e}{\partial x}\right) \\ \frac{\partial T^e}{\partial y}\frac{\partial}{\partial T_i}\left(\frac{\partial T^e}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial T^e}{\partial z}\frac{\partial}{\partial T_i}\left(\frac{\partial T^e}{\partial z}\right)\end{bmatrix} - \left(\bar{q}_e - \rho_e c_e \frac{\partial T^e}{\partial t}\right)\frac{\partial T^e}{\partial T_i}\right\}dV + \int_{S_{2q}^e}\hat{q}_e \frac{\partial T^e}{\partial T_i}dS + \int_{S_{2k}^e} h_e\left(T^e - T_{tek}\right)\frac{\partial T^e}{\partial T_i}dS \tag{4.12}$$

Analogicky s pevnostnou úlohou *geometrickú* diskretizáciu tohoto vzťahu dostaneme, keď do neho zavedieme aproximačnú funkciu pre teplotu (8) s diskrétnymi hodnotami funkcie teploty na prvku – teplotami v uzlových bodoch. *Časová* diskretizácia týchto hodnôt, analogicky s dynamickou úlohou, sa opäť zrealizuje diskretizáciou časového intervalu riešenia úlohy pomocou časových krokov.

Derivácie funkcie T^e vystupujúce v (12) sú

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T^e}{\partial x} &= \begin{bmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial N_{NUE}}{\partial x}\end{bmatrix}\mathbf{T}^e \\
\frac{\partial T^e}{\partial y} &= \begin{bmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial N_{NUE}}{\partial y}\end{bmatrix}\mathbf{T}^e \\
\frac{\partial T^e}{\partial z} &= \begin{bmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \cdots & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \cdots & \frac{\partial N_{NUE}}{\partial z}\end{bmatrix}\mathbf{T}^e
\end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial T_i}\left(\frac{\partial T^e}{\partial x}\right)=\frac{\partial N_i}{\partial x};\quad \frac{\partial}{\partial T_i}\left(\frac{\partial T^e}{\partial y}\right)=\frac{\partial N_i}{\partial y};\quad \frac{\partial}{\partial T_i}\left(\frac{\partial T^e}{\partial z}\right)=\frac{\partial N_i}{\partial z};\quad \frac{\partial T^e}{\partial T_i}=N_i \tag{4.14}$$

$$\frac{\partial T^e}{\partial t}=\mathbf{N}_e\begin{bmatrix}\frac{\partial T_1}{\partial t}\\ \frac{\partial T_2}{\partial t}\\ \vdots\\ \frac{\partial T_{NUE}}{\partial t}\end{bmatrix}=\mathbf{N}_e\dot{\mathbf{T}}_e \tag{4.15}$$

Všimnime si, že vo vzťahu (15) sa objavili nové neznáme – derivácie uzlových teplôt – zapísané vo vektore $\dot{\mathbf{T}}_e$. Je to dôsledok toho, že riešime časovo závislú úlohu.

Zo vzťahu (11) už teraz podľa (12) vieme vyjadriť sústavu rovníc pre *e*- ty prvok

$$\frac{\partial \Pi_e}{\partial T_i}=0 \qquad i = 1, 2, \ldots, \mathrm{i}, \ldots, \mathrm{NUE} \tag{4.16}$$

ktorá v maticovom zápise poskytuje matice *e*-teho prvku

$$\left(\mathbf{K}_1^e+\mathbf{K}_2^e\right)\mathbf{T}^e+\mathbf{K}_3^e\dot{\mathbf{T}}^e-\mathbf{f}^e=\mathbf{0} \tag{4.17}$$

Matica

$$\mathbf{K}_1^e=\int_{V_e}\mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}\,dV \tag{4.18}$$

obsahujúca

$$\mathbf{B}_e=\begin{bmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial N_{NUE}}{\partial x}\\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial N_{NUE}}{\partial y}\\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \cdots & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \cdots & \frac{\partial N_{NUE}}{\partial z}\end{bmatrix};\qquad \mathbf{D}_e=\begin{bmatrix}\lambda_x^e & 0 & 0\\ 0 & \lambda_y^e & 0\\ 0 & 0 & \lambda_z^e\end{bmatrix}$$

sa nazýva matica difúznej vodivosti prvku. Matica

$$\mathbf{K}_2^e=\int_{S_{2k}^e}h\mathbf{N}_e^T\mathbf{N}_e\,dS \tag{4.19}$$

je matica plošnej vodivosti prvku a matica

$$\mathbf{K}_3^e=\int_{V_e}\rho_e c_e\mathbf{N}_e^T\mathbf{N}_e\,dV \tag{4.20}$$

sa nazýva matica merného tepla, resp. tepelnej kapacity alebo, podľa analógie s dynamikou, matica tepelného tlmenia prvku.

Vektor "zaťaženia" prvku je

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{f}_1^e - \mathbf{f}_2^e + \mathbf{f}_3^e = \int_{V_e} \overline{q}\,\mathbf{N}_e^T dV - \int_{S_{2q}} \hat{q}\,\mathbf{N}_e^T dS + \int_{S_{2k}} hT_{tek}\,\mathbf{N}_e^T dS \qquad (4.21)$$

kde jeho tri členy predstavujú vektory generácie tepla, tepelného toku a konvekcie.

Ak analogicky s pevnostnou úlohou zavedieme pomocou rozšírených matíc prvkov do sumácie (11) globálne vektory výpočtového modelu celého telesa, dostaneme

$$\left(\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2\right)\mathbf{T} + \mathbf{K}_3\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{f}$$

alebo v najúspornejšom zápise

$$\mathbf{K}_3\dot{\mathbf{T}} + \mathbf{K}\mathbf{T} = \mathbf{f} \qquad (4.22)$$

Názvy globálnych matíc sú analogické s názvami prvkových matíc, matica $\mathbf{K}$ sa nazýva matica vodivosti telesa.

Vzťah (22) predstavuje sústavu diferenciálnych rovníc 1. rádu s konštantnými koeficientami, ktorú program rieši v časových krokoch analogicky ako dynamickú úlohu. Pri hľadaní ustáleného teplotného poľa sa rieši sústava obyčajných rovníc rovnakými metódami ako pri statickej pevnostnej úlohe.

Po vypočítaní uzlových teplôt telesa (vektora $\mathbf{T}$) program v cykle cez všetky prvky telesa určí pomocou interpolačného vzťahu (8) aproximačné funkcie teploty v prvkoch a z nich odvodené neznáme. Výsledky potom môžme v postprocesore programu analyzovať a textovo, resp. graficky spracovávať rovnakými postupmi a prostriedkami ako pri pevnostných úlohách.

Výhodou univerzálnych programov MKP, medzi ktoré patrí aj program ANSYS, je to, že fyzikálne rôzne typy úloh sa riešia analogicky, rovnakým postupom a v podstate aj pomocou rovnakých príkazov. Pri riešení úloh prenosu tepla môžeme teda využívať všetky skúsenosti získané pri riešení pevnostných úloh.

Pravda, treba rozlišovať fyzikálne rozdiely a rozumieť fyzikálnej podstate úlohy. Z formálneho hľadiska sa potom plošný tepelný tok zadáva v programe rovnako ako plošný tlak, okrajová podmienka pre teplotu sa zadáva rovnako ako okrajová podmienka pre posunutie atď. Úplne rovnako sa tiež vytvára geometrický a výpočtový model telesa, pravda, s fyzikálne rozdielnymi materiálovými konštantami a inak nazvanými prvkami; rovnaké prostriedky sa tiež využívajú na grafické i textové vyhodnotenie vypočítaných výsledkov.

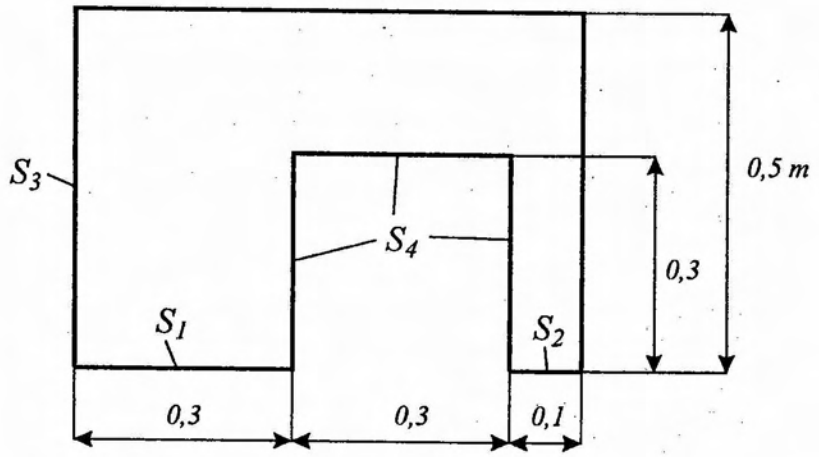
Demonštrujú to dva nasledujúce príklady, kde je opísaný postup riešenia stacionárneho a nestacionárneho vedenia tepla pri dvojrozmernej úlohe. Priestorové úlohy sa riešia úplne analogicky.

Príklad 4.1

Pre tepelne izolované teleso s jednotkovou hrúbkou a rozmermi podľa obrázku určte ustálené teplotné pole pre tieto okrajové podmienky:

1. Na ploche S_1 je zadaná teplota 100 °C a na ploche S_2 20 °C
2. K podmienke č. 1 pribudne ešte tepelný tok cez plochu S_3 o veľkosti 5000 Wm^{-2}
3. K podmienkam č. 1 a 2 pribudne ešte odvod tepla konvekciou na ploche S_4 s teplotou tekutiny T_{tek} = 10 °C a koeficientom h = 120 $WK^{-1}m^{-2}$

Materiálové konštanty telesa sú: ρ = 7850 kgm^{-3}, λ = 50 $Wm^{-1}K^{-1}$, c = 440 $Jkg^{-1}K^{-1}$.



1. Zadanie názvu úlohy
Utility Menu>File>Change Jobname ... /FILNAM = STAC_TEPLO, OK;

2. Určenie typu riešenej úlohy
Main Menu>Preferences... THERMAL – ON, OK;

3. Zadanie typu prvku
Main Menu>Preprocessor>Element Type>Add/Edit/Delete>Add... Solid, Quad 4node 55, OK, Close;

4. Materiálové údaje
Preprocessor>Material Props>Material Models... Thermal, Conductivity, Isotropic,
KXX = 50, OK,Density, DENS = 7850, OK, Material, Exit;

5. Vytvorenie stredovej plochy modelu
Preprocessor>Modeling>Create>Areas>Rectangle>By Dimensions...
X1 = 0, X2 = 0.7, Y1 = 0, Y2 = 0.5, Apply,
X1 = 0.3, X2 = 0.6, Y1 = -0.1, Y2 = 0.3, OK;

6. Odčítanie plôch
Preprocessor>Modeling>Operate>Booleans>Subtract>Areas↑ P: stred väčšej plochy, OK,
P: stred menšej plochy, OK;

7. Určenie priemernej dĺžky hrany prvku
Preprocessor>Meshing>Size Cntrls>ManualSize>Global>Size... SIZE = 0.02, OK;

8. Vytvorenie siete prvkov
Preprocessor>Meshing>Mesh>Areas>Free↑ Pick All;

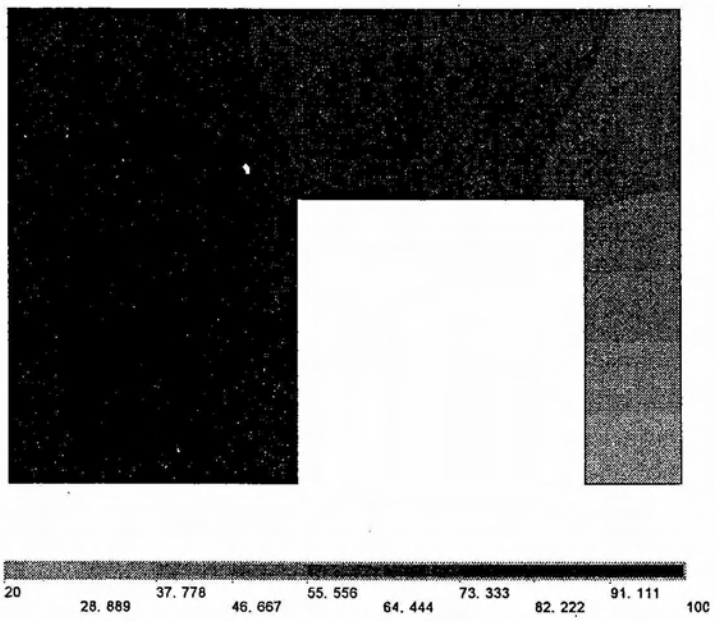
9. Ukončenie práce v predprocesore
Preprocessor>Finish;

10. Zadanie okrajových podmienok pre teplotu
Main Menu>Solution>Define Loads>Apply>Thermal>Temperature>On Lines↑ P: plochu (čiaru) S_1, Apply, TEMP, VALUE = 100, Apply↑ P: plochu (čiaru) S_2, OK, TEMP, VALUE = 20, OK;

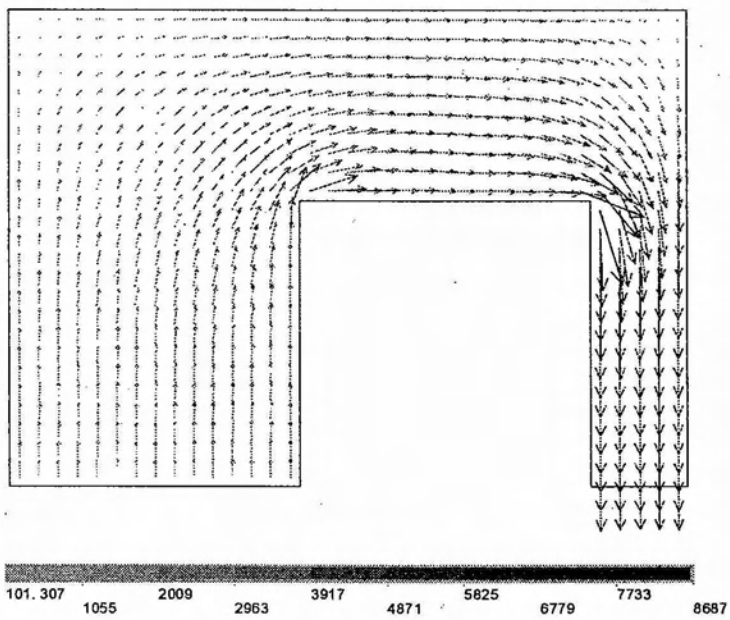
11. Výpočet úlohy
Solution>Solve>Current LS... OK;

12. Ukončenie práce v *Solution*
Solution>Finish;

13. Zobrazenie vypočítaného ustáleného teplotného poľa
Main Menu>General Postproc>Plot Results>Contour Plot>Nodal Solu... DOF Solution, TEMP, OK;



14. Zobrazenie vypočítaného ustáleného tepelného toku
General Postproc>Plot Results>Vector Plot>Predefined... Thermal flux TF, OK;



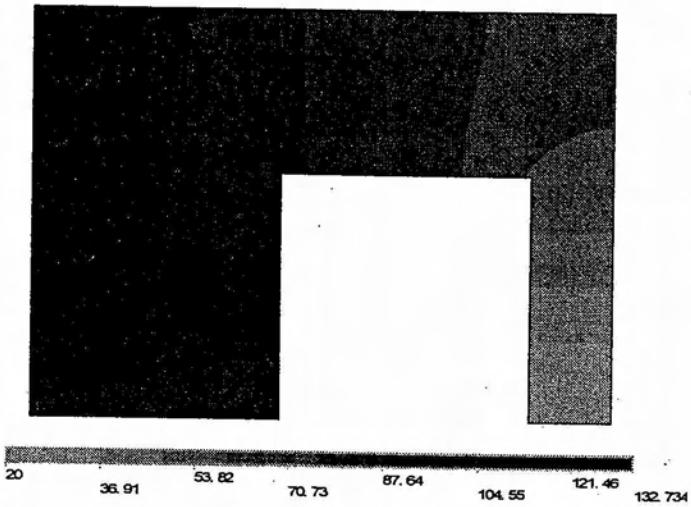
15. Návrat k sieti prvkov
Utility Menu>Plot>Elements;

16. Pridanie vonkajšieho tepelného toku cez plochu S_3
Main Menu>Solution>Define Loads>Apply>Thermal>Heat Flux>On Lines↑
P: plochu (čiaru) S_3, VALI = 5000, OK;

17. Výpočet s novými okrajovými podmienkami
Solution>Solve>Current LS... OK;

18. Ukončenie práce v *Solution*
Solution>Finish;

19. Zobrazenie vypočítaného ustáleného teplotného poľa
Main Menu>General Postproc>Plot Results>Contour Plot>Nodal Solu... DOF Solution, TEMP, OK;

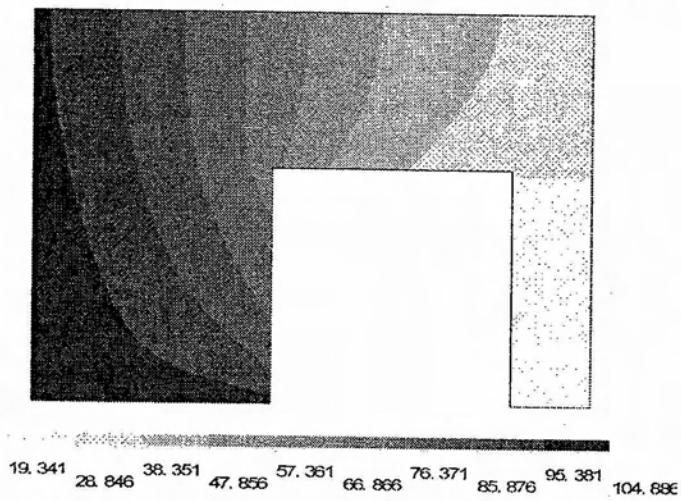


20. Návrat k sieti prvkov
Utility Menu>Plot>Elements;

21. Pridanie konvektívnej okrajovej podmienky
Main Menu>Solution>Define Loads>Apply>Thermal>Convection>On Lines↑
P: postupne 3 čiary plochy S_4, OK, VALI = 120, VAL2I = 10, OK;
22. Výpočet s novými okrajovými podmienkami
Solution>Solve>Current LS... OK;

23. Ukončenie práce v *Solution*
Solution>Finish;

24. Zobrazenie vypočítaného ustáleného teplotného poľa
Main Menu>General Postproc>Plot Results>Contour Plot>Nodal Solu... DOF Solution, TEMP, OK;



25. Ukončenie práce s úlohou
Ansys Toolbar>Quit... Save Geom+Loads, OK;

Príklad 4.2

Teleso z príkladu 4.1 má v čase t_0 = 0 konštantnú teplotu 20 °C. Určite pre teleso hodnoty nestacionárnebo teplotného poľa v časoch 6000 a 36000 sekúnd, keď v čase t_0 začne do telesa cez plochu S_3 prúdiť tepelný tok veľkosti 5000 Wm^{-2} a na ploche S_2 sa udržuje konštantná teplota 20 °C. Určite tiež časový priebeh teploty v hornom pravom rohu telesa v čase od 0 do 36000 sekúnd.

1. Zadanie názvu úlohy
Utility Menu>File>Change Jobname ... /FILNAM = NESTAC_TEPLO, OK;

2. Určenie typu riešenej úlohy
Main Menu>Preferences... THERMAL = ON, OK;

3. Zadanie typu prvku
Main Menu>Preprocessor>Element Type>Add/Edit/Delete>Add... Solid, Quad 4node 55, OK, Close;

4. Materiálové údaje
Preprocessor>Material Props>Material Models... Thermal, Conductivity, Isotropic,
KXX = 50, OK, Density, DENS = 7850, OK, Specific Heat = 440, OK, Material, Exit;

5. Vytvorenie stredovej plochy modelu
Preprocessor>Modeling>Create>Areas>Rectangle>By Dimensions...
X1 = 0, X2 = 0.7, Y1 = 0, Y2 = 0.5, Apply,
X1 = 0.3, X2 = 0.6, Y1 = -0.1, Y2 = 0.3, OK;

6. Odčítanie plôch
Preprocessor>Modeling>Operate>Booleans>Subtract>Areas↑ P: stred väčšej plochy, OK,
P: stred menšej plochy, OK;

7. Určenie priemernej dĺžky hrany prvku
Preprocessor>Meshing>Size Cntrls>ManualSize>Global>Size... SIZE = 0.02, OK;

8. Vytvorenie siete prvkov
Preprocessor>Meshing>Mesh>Areas>Free↑ Pick All;

9. Ukončenie práce v predprocesore
Preprocessor>Finish;

10. Zadanie okrajovej podmienky pre teplotu
Main Menu>Solution>Define Loads>Apply>Thermal>Temperature>On Lines↑ P: plochu (čiaru) S_2, OK, TEMP, VALUE = 20, OK;

11. Zadanie okrajovej podmienky pre tepelný tok
Solution>Define Loads>Apply>Thermal>Heat Flux>On Lines↑
P: plochu (čiaru) S_3, OK, VALI = 5000, OK;

12. Začiatočná podmienka
Solution>Define Loads>Apply>Initial Condit'n>Define↑
Pick ALL, LAB = TEMP, VALUE = 20, OK;

13. Zadanie typu úlohy
Solution>Analysis Type>New Analysis... Transient = ON, OK, TRNOPT = FULL, OK;

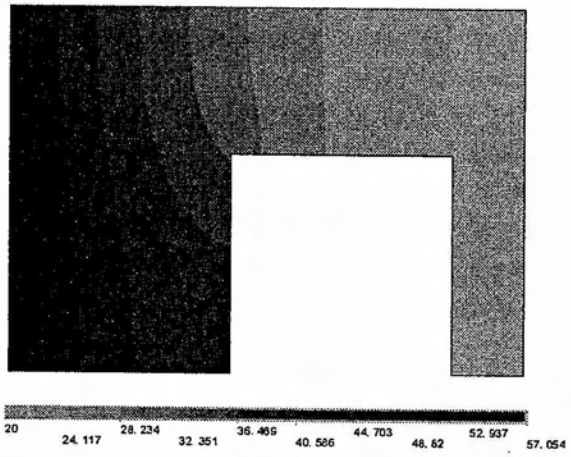
14. Údaje pre zaťažovacie kroky
Solution>Load Step Opts>Output Ctrls>DB/Results File... FREQ = Every substep, OK;

Solution> Load Step Opts>Time/Frequenc>Time-Time Step... TIME = 36000, DELTIM = 600,
KBC = Stepped, AUTOTS = OFF, OK;

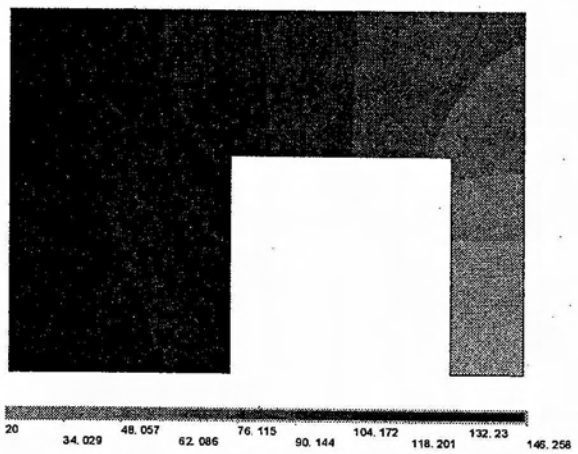
15. Výpočet úlohy
Solution>Solve>Current LS... OK;

16. Ukončenie práce v *Solution*
Solution>Finish;

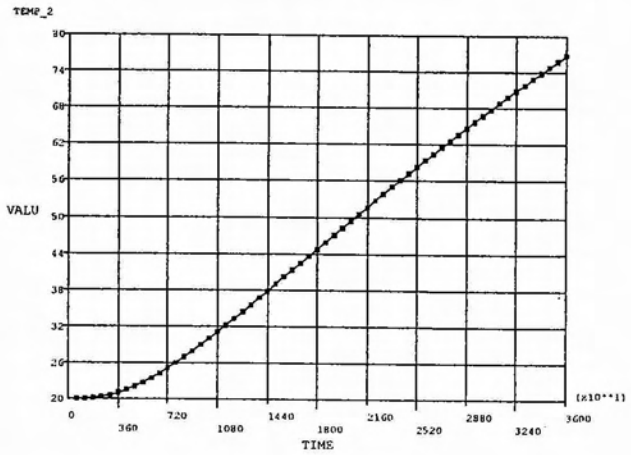
17. Zobrazenie teplotného poľa v čase 6000 sekúnd
Main Menu>General Postproc>Read Results>By Time/Freq... TIME = 6000, OK;
Main Menu>General Postproc>Plot Results>Contour Plot>Nodal Solu... DOF Solution, TEMP, OK;



18. Zobrazenie teplotného poľa v čase 36000 sekúnd
Main Menu>General Postproc>Read Results... Last SET;
Utility Menu>Plot>Replot;



19. Grafické zobrazenie časového priebehu teploty v uzle
Ansys Main Menu>Time Hist Postpro↑ (Otvorí sa okno *Variable Viewer*) P: Prvú ikonu (*Add Data*) >Nodal Solution>DOF Solution>Temperature... OK↑ P: Pravý horný bod modelu, OK↑ P: Tretiu ikonu (*Graph Data*), File, Close;



25. Ukončenie práce s úlohou
Ansys Toolbar>Quit... Save Geom+Loads, OK;

Literatúra

[1] Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L.: *Finite Element Method: Volume 1- The Basis*, Butterworth Heinemann, London, 2000

[2] Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L.: *Finite Element Method: Volume 2- Solid Mechanics*, Butterworth Heinemann, London, 2000

[3] Mackerle, J.: *Titles of Finite Element Books*, URL: http://www.solid.ikp.liu.se/fe/tit.html

[4] ANSYS, Inc.: *ANSYS 8.0 Documentation*

[5] Moaveni, S.: *Finite Element Analysis – Theory and Application with ANSYS*, Prentice Hall, New Jersey, 1999

[6] Trebuňa, F., Jurica, V., Šimčák, F.: *Pružnosť a pevnosť I, II*, Vienala, Košice, 2000

[7] Benča, Š.: *Aplikovaná pružnosť I – Metóda konečných prvkov*, ES SVŠT, Bratislava, 1987

[8] Bathe, K. J.: *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1982

[9] Hinton, E. and Owen, D. R. J.: *Finite Element Programming*, Academic Press, London, 1977

[10] Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E., Witt, R. J.: *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, J. Wiley & Sons, New York, 2002

[11] Hughes, T. J. R.: *Finite Element Method - Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1987

[12] Rao, S. S.: *The Finite Element Method in Engineering*, Pergamon Press, Oxford, 1982, 1989, 1999

[13] Kompiš, V., Žmindák, M., Kaukič, M.: *Počítačové metódy v mechanike. Lineárna analýza*, EDIS, Žilina, 1997

[14] Kaukič, M.: *Numerická analýza I. Základné problémy a metódy*, MC Energy, Žilina, 1998

[15] Murín, J.: *Metóda konečných prvkov pre prútové a rámové konštrukcie*, Vydavateľstvo STU, Bratislava, 1999

[16] Pilkey, W. D., Wunderlich, W.: *Mechanics of Structures – Variational and Computational Methods*, CRC Press, London, 1994

[17] Bickford, W. B.: *A First Course in the Finite Element Method*, IRWIN, Boston, 1994

[18] Záhorec, O., Caban, S.: *Dynamika*, OLYMP, Košice, 2002

[19] Guyan, R. J.: *Reduction of Stiffness and Mass Matrices*, AIAA Journal, 3(2), 380, 1965

[20] Golub, G. H., van Loan, Ch. F.: *Matrix Computations*, The John Hopkins University Press, Baltimore, 1989

[21] Humar, J. L.: *Dynamics of Structures*, A.A.Balkema Publisher, Rotterdam, 2001

[22] Müller, G., Groth, C.: *FEM für Praktiker*, Expert Verlag, Germany, 1998 - 2003

EDÍCIA MONOGRAFIÍ

Doc. Ing. Štefan Benča, CSc.

VÝPOČTOVÉ POSTUPY MKP
PRI RIEŠENÍ LINEÁRNYCH ÚLOH MECHANIKY

Vydala Slovenská technická univerzita v Bratislave vo Vydavateľstve STU Bratislava, Vazovova 5, v roku 2006.

Rozsah 150 strán, 13,646 AH, 13,881 VH, 1. opravené vydanie, náklad 300 výtlačkov, edičné číslo 5234, tlač Vydavateľstvo STU v Bratislave.

85 – 228 – 2006 Sk 112,-

ISBN 80-227-2404-1
ISBN 80-227-2032-1 (1. vyd., r. 2004)

85 – 228 – 2006 **Sk 112,–**

ISBN 80-227-2404-1